



Modélisation mathématique et étude numérique d'un aérosol dans un gaz raréfié. Application à la simulation du transport de particules de poussière en cas d'accident de perte de vide dans ITER.

Frédérique Charles

► To cite this version:

Frédérique Charles. Modélisation mathématique et étude numérique d'un aérosol dans un gaz raréfié. Application à la simulation du transport de particules de poussière en cas d'accident de perte de vide dans ITER.. Mathématiques [math]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2009. Français. NNT: . tel-00463639

HAL Id: tel-00463639

<https://theses.hal.science/tel-00463639>

Submitted on 13 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Spécialité : Mathématiques Appliquées

présentée par
Frédérique CHARLES

pour l'obtention du titre de
Docteur de l'École Normale Supérieure de Cachan

Sujet de la thèse :

**Modélisation mathématique et étude numérique d'un
aérosol dans un gaz raréfié. Application à la simulation du
transport de particules de poussière en cas d'accident de
perte de vide dans ITER.**

Soutenue publiquement le 25 Novembre 2009
après avis des rapporteurs et devant le jury

Kazuo AOKI	Professeur, Université de Kyoto	<i>Examineur</i>
Stéphane DELLACHERIE	Ingénieur de recherche, CEA de Saclay	<i>Encadrant CEA</i>
Laurent DESVILLETES	Professeur, ENS de Cachan	<i>Directeur de thèse</i>
Bruno DESPRÉS	Professeur, Université Paris VI	<i>Rapporteur</i>
Aldo FREZZOTTI	Professeur, Politecnico Di Milano	<i>Examineur</i>
François GOLSE	Professeur, École Polytechnique	<i>Président du jury</i>
Stéphane MISCHLER	Professeur, Université Paris-Dauphine	<i>Rapporteur</i>
Jacques SEGRÉ	Ingénieur de recherche, CEA de Saclay	<i>Examineur</i>

CMLA UMR 8536, ENS Cachan
61 avenue du président Wilson, 94235 Cachan Cedex

Commissariat à l'Énergie Atomique, DEN/DANS/DM2S/SFME
91191 GIF-SUR-YVETTE Cedex

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement les personnes qui ont encadré cette thèse et avec qui j'ai beaucoup apprécié travailler. Tout d'abord Laurent Desvilletes, dont la grande disponibilité, la gentillesse et les conseils m'ont été très précieux. Je remercie ensuite Stéphane Dellacherie, en particulier pour nos longues discussions sur les aspects de modélisation, pour son enthousiasme et ses conseils. Philippe Roblin m'a beaucoup aidé sur les aspects numériques, et m'a expliqué avec patience beaucoup de détails techniques ; je lui en suis très reconnaissante. Enfin, le sujet de cette thèse a vu le jour grâce à Jacques Segré, qui malgré ses responsabilités au sein du CEA a suivi l'évolution de mon travail et y a apporté un oeil éclairé et de nombreuses remarques. Merci !

Je remercie ensuite Bruno Després et Stéphane Mischler d'avoir accepté de rapporter ma thèse, ainsi que Kazuo Aoki, Aldo Frezzotti et François Golse d'avoir accepté d'être examinateurs. C'est un grand honneur de les compter parmi mon jury de thèse.

J'ai eu la chance de bénéficier de l'environnement de deux laboratoires de recherche. D'une part au CEA, au sein du LMPE puis du LSET. Je remercie Daniel Caruge, ainsi que Philippe Montarnal (pour ses encouragements, et son soutien qui m'a permis d'aller présenter mon travail à plusieurs conférences). Merci à tous les membres du LSET et du LETR pour leur accueil, et plus particulièrement au couloir du 2ème étage que j'ai cotoyé avec plaisir : Christian G., Christian V., Anh Ha (dont j'ai pu suivre les progrès en français), Jean-Christophe, Jean-Luc (un peu ours mais c'est comme ça qu'on l'aime), Pascal (liaison télépathique d'HoChiMinh Ville bien reçue!), Philippe (qui nous a fait partager ses nombreuses passions), Siham (et les délicieuses pâtisseries tusiennes qu'elle nous ramenait !), et tous les autres... Merci à Evelyne et Marie-Claude pour leur efficacité. Enfin merci à Benjamin et Marie (et Neil Armstrong) pour toutes les pauses café passées dans leur bureau !

Je remercie également tous les membres du CMLA où j'ai eu la chance de passer l'autre partie de mon temps. Merci en particulier à Micheline, Sandra, Véronique et Virgnie pour leur efficacité et la bonne humeur qu'elles répandent dans le labo ! Merci à tous les thésards et ex-thésards pour tous les bons moments passés ensemble : Adina (merci pour ton aide en anglais !), Aude (à quand le prochain congrès en Corse ?), Ayman (et sa barbe de théserroriste), Benjamin (on attends toujours tes lasagnes au chèvre !), Bruno (et ses crumbles "ratés"), Eric (attention à tes doigts !), Frédéric (déchaîné sur la piste de danse de la Colle-Sur-Loup), Gaël (toujours prêt à venir partager un thé, des gateaux ou des ragots), Jean-Pascal, Julie (spécialiste en plantage de serveur), Neus (et ses fabuleuses pâtisseries !), Nicolas C., Nicolas L. (toujours prêt à dépanner nos problèmes informatiques depuis le Japon), Rafa (l'éternel thésard), Yohann, Zhongwei (trop honnête pour le Loup-Garou), et tous les autres...

Je remercie toutes les personnes que j'ai rencontré pendant ma thèse (pour les discussions scientifiques que nous avons eu, leurs conseils ou leurs encouragements) et qui m'ont donné envie de continuer : mes grands "frères et soeurs" scientifiques (Céline, Francesco, Julien et Laurent), Mihai Bostan, Stéphane Brull, Emmanuel Frenod, et beaucoup d'autres... Je remercie aussi l'équipe BANG de l'INRIA m'accueille maintenant en post-doc, et plus particulièrement Marie Doumic-Jauffret. Je n'oublie pas non plus les membres

de l'IECN de Nancy où j'ai fait mon DEA, en particulier Antoine Henrot (pour tous ses conseils, et pour ses cours qui m'ont fait découvrir les EDP !) et Jean-Rodophe Roche (qui a guidé mes tous premiers pas dans la recherche en encadrant mon mémoire de DEA).

Je remercie mes amis (matheux, grimpeurs, bisontins, mineurs, ...) aux cotés desquels j'ai puisé mon énergie pendant ces années de thèse ; en particulier merci à tous ceux qui sont venus partager avec moi ce grand jour (Augustin, Camille -le voyageur Kirghize-, Camille -le contrôleur-, Camille -l'agrégative-, Daniel, Felipe, Gab, Gaël, Guillaume, Luc, Nicolas, Pietro, Rafik, Roum, Séverine, Thibaut, et ceux que j'oublie...) ou qui ont pensé à moi de loin. Un merci spécial à Aude, Ayman et Neus qui m'ont aidé à la préparation du pot et au rangement.

Enfin je remercie mes parents Christine et Dominique, Perrine et Antonello (ainsi que Jean-Lucas, et mon mignon neveu Vittorio), Pierre-Olivier, Gaspard, Michelle et Etienne, Baptiste, et tout le reste de ma famille, pour leur soutien et leur présence pendant toutes ces années d'études.

Table des matières

Introduction	1
Contexte	2
La théorie cinétique	3
Description mésoscopique d'un gaz	3
L'opérateur de collision de Boltzmann	4
L'équation de Boltzmann	9
Extension à des milieux plus complexes	12
Les modèles d'aérosols	14
Objectifs de ce travail et démarche	16
Publications	42
 I Étude d'un modèle de type Boltzmann/Boltzmann	 45
1 Établissement d'un modèle cinétique de type Boltzmann/Boltzmann	47
1.1 Hypothèses et présentation du modèle	48
1.1.1 Hypothèses	48
1.1.2 Estimation des fréquences de collision	49
1.1.3 Écriture du modèle mathématique	52
1.2 Modèle de collision élastique	53
1.2.1 Présentation de $R_1^e(f_1, f_2)$ et $R_2^e(f_1, f_2)$	53
1.2.2 Propriétés des opérateurs $R_1^e(f_1, f_2)$ et $R_2^e(f_1, f_2)$	54
1.3 Modèle de collision par réflexion diffuse	55
1.3.1 Hypothèses de modélisation	55
1.3.2 Etablissement des opérateurs de collision	56
1.3.3 Autre formulation des opérateurs de collision	61
1.3.4 Modèle "pseudo-maxwellien"	67
1.3.5 Améliorations possibles du modèle	68
 2 Étude de l'existence de solutions au couplage Boltzmann/Boltzmann homogène en espace dans le cas de collisions élastiques	 69
2.1 Notations	70
2.2 Introduction	71
2.3 Existence d'une solution pour le système avec sections de collisions tron-	
quées	75
2.3.1 Opérateurs de collisions à sections tronquées	75

2.3.2	Existence de solutions approchées (f_1^n, f_2^n)	77
2.3.3	Conservation de la masse et de l'énergie	81
2.3.4	Propagation de la positivité	82
2.3.5	Décroissance de l'entropie	87
2.4	Existence d'une solution (f_1, f_2) pour le couplage B/B	92
2.4.1	Extraction d'une sous-suite convergente de $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$	92
2.4.2	Convergence des opérateurs de collision	94
2.5	Établissement de l'inégalité d'entropie	103
2.6	Établissement de la relation de conservation de l'énergie cinétique	111
3	Simulation numérique du couplage Boltzmann/Boltzmann	117
3.1	Introduction	118
3.2	Modèle mathématique	118
3.3	Méthode numérique	120
3.3.1	Principe général	121
3.3.2	Simulation de $Q_{sd}(f_2, f_2)$ par une méthode de Bird	123
3.3.3	Simulation de $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$ par une méthode de Nanbu	125
3.4	Conditions sur le pas de temps et coût de simulation	130
3.4.1	Condition sur Δt dans le cas d'un système homogène en espace	130
3.4.2	Condition sur Δt dans le cas d'un système inhomogène en espace	132
3.4.3	Nombre de paires de collision	133
3.5	Exemples de simulations numériques du couplage homogène en espace	134
3.5.1	Cas des opérateurs à section de sphères dures	135
3.5.2	Validation du code	137
3.6	Conclusion	144
II	Étude d'un modèle de type Vlasov/Boltzmann	147
4	Dérivation d'un modèle asymptotique Vlasov/Boltzmann	149
4.1	Introduction	150
4.2	Premier modèle asymptotique	153
4.2.1	Échelles caractéristiques du système	153
4.2.2	Adimensionnement	155
4.2.3	Développement asymptotique de $\bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2)$	161
4.2.4	Premier modèle asymptotique Vlasov/Boltzmann	164
4.2.5	Étude du système à différentes échelles de temps	165
4.3	Second modèle asymptotique	168
4.3.1	Second adimensionnement	168
4.3.2	Développement asymptotique de $R_1(f_1, f_2)$	169
4.3.3	Second modèle asymptotique Vlasov/Boltzmann	172
5	Étude de la convergence faible des solutions à un couplage Boltzmann/Boltzmann vers une solution d'un couplage Vlasov/Boltzmann	175
5.1	Introduction	176
5.2	Relations of conservation of mass, energy and entropy	184

5.3	Boundedness of Moments of order $\gamma > 2$	185
5.4	Weak convergence of equations (5.21) – (5.22)	192
6	Simulation numérique du modèle Vlasov/Boltzmann et application à un scénario d'accident de perte de vide dans ITER	201
6.1	Introduction	202
6.2	Comparaison des modèles Boltzmann/Boltzmann et Vlasov/Boltzmann . .	203
6.2.1	Modèles mathématiques	203
6.2.2	Méthode numérique	205
6.2.3	Simulations numériques	209
6.2.4	Conclusion	217
6.3	Étude du transport de particules de poussière dans un scénario d'accident de perte de vide	218
6.3.1	Boîte ouverte	218
6.3.2	Boîte fermée	220
6.4	Modèle de mobilisation des particules de poussière sur les parois	224
Annexes		229
Annexe A.	Rappel de quelques grandeurs physiques utilisées	229
Annexe B.	Noyau de réflexion diffuse $K(u \rightarrow v, x, t)$	233
Annexe C.	Quelques calculs d'intégrales	235
Annexe D.	Principe des méthodes particulières	237
Annexe E.	Établissement des expressions de $\Upsilon_{a, sd}(f_2)$ et $\Upsilon_{a, m}(f_2)$	242
Bibliographie		245

Table des figures

1	Schéma du futur réacteur ITER (source : www.iter.org).	2
2	Lien entre les paramétrisations ω et σ des vitesses post-collisionnelles. . . .	7
3	Schéma de résolution du couplage Vlasov/Boltzmann.	40
1.1	Réflexion diffuse d'une molécule sur la surface d'une particule de poussière .	56
1.2	Détermination du nombre de molécules de vitesse v_2 (à dv_2 près) et de paramètres d'impact p et ϵ arrivant sur une particule de poussière cible pendant le temps dt	57
1.3	Réflexion diffuse d'une molécule sur le plan de normale n tangent à la particule de poussière.	58
3.1	Méthode de tirage de la vitesse relative post-collisionnelle.	128
3.2	Évolution des vitesses macroscopiques suivant Ox des deux espèces. . . .	135
3.3	Évolution des températures cinétiques des deux espèces pour $T_{surf} = 300$ K, $\mathbf{u}_{2,in} = (300, 300, 300) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$	136
3.4	Évolution des températures cinétiques des espèces pour $T_{surf} = 500$ K, $\mathbf{u}_{2,in} = (0, 0, 0) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$	137
3.5	Évolution de la première composante de la vitesse macroscopique : comparaison entre les résultats numériques et les expressions explicites dans le cas d'une section maxwellienne.	140
3.6	Évolution des températures cinétiques des espèces : comparaison entre les résultats numériques et les expressions "semi-explicites" dans le cas d'une section maxwellienne.	144
6.1	Comparaison de l'évolution de la composante suivant Ox des vitesses macroscopiques déduites des systèmes (6.3)-(6.4) et (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$. .	210
6.2	Comparaison de l'évolution des vitesses macroscopiques des systèmes (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon_{a,sd}(f_2)$ et (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$	212
6.3	Comparaison entre les vitesses macroscopiques obtenues via la résolution numérique du système (B) par une méthode PIC/Nanbu et les expressions des vitesses données par (6.39) et (6.40).	214
6.4	Comparaison entre les vitesses macroscopiques déduites du système (A) obtenues par la méthode PIC/Nanbu et les solutions du système (6.41). .	216
6.5	Schéma du cube ouvert.	218
6.6	Scénario d'accident de perte de vide dans un cube ouvert, avec le modèle Boltzmann/Boltzmann.	219

6.7	Scénario d'accident de perte de vide dans un cube ouvert, avec le modèle Vlasov/Boltzmann où $\Upsilon = \Upsilon_b$	221
6.8	Scénario d'accident de perte de vide dans un cube fermé, avec le modèle Vlasov/Boltzmann où $\Upsilon = \Upsilon_b$	222
6.9	Scénario d'accident de perte de vide dans une boîte de géométrie en cylindre torique, avec le modèle Vlasov/Boltzmann où $\Upsilon = \Upsilon_b$	223

Liste des tableaux

6.1	Comparaison des Temps CPU (en s) pour les systèmes (6.3)-(6.4) et (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_b(f_2)$, pour des valeurs de densité et de rayon de particules données par (6.35).	211
6.2	Comparaison des Temps CPU (en s) pour les systèmes (6.3)-(6.4) et (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_b(f_2)$, pour des valeurs de densité et de rayon de particules donnés par (6.36).	212
6.3	Comparaison des Temps CPU (en s) pour les systèmes V/B (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon_{a,sd}(f_2)$ et $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$	213

Introduction

Sommaire

Contexte	2
La théorie cinétique	3
Description mésoscopique d'un gaz	3
L'opérateur de collision de Boltzmann	4
L'équation de Boltzmann	9
Extension à des milieux plus complexes	12
Les modèles d'aérosols	14
Objectifs de ce travail et démarche	16
Publications	42

1. Contexte

Dans les réacteurs de fusion par confinement magnétique (tokamak), des neutrons très énergétiques sont libérés par les réactions de fusion dans le plasma. Ce flux neutronique, ainsi que les ruptures incidentelles de confinement du plasma, provoquent une érosion des parois de l'enceinte et sont à l'origine de la formation de poussières. À l'arrêt du réacteur, celles-ci se déposent sur les parois de l'enceinte à vide, notamment dans sa partie inférieure appelée divertor. Dans le futur réacteur ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), on estime que le diamètre de ces particules de poussière, composées essentiellement de carbone, béryllium et tungstène, sera compris entre 10 nm et 10 μm [GO].¹ La présence de ces poussières activées dans le réacteur soulève divers problèmes : risque chimique (possibilité de réaction explosive sur les surfaces chaudes au contact d'hydrogène), risque de rétention (piégeage du tritium par les particules carbonées), et enfin risque radiologique. En particulier, l'entrée d'air accidentelle dans l'enceinte à vide du réacteur à l'arrêt (événement appelé "accident de perte de vide") pourrait provoquer la mobilisation de ces poussières, créant le risque d'une dispersion atmosphérique de particules activées. L'un des enjeux des études de sûreté d'ITER est donc de pouvoir caractériser et décrire la mobilisation et le déplacement de ces poussières lors d'un accident de perte de vide. Nous proposons dans ce travail un modèle cinétique pour la description d'un aérosol dans un gaz raréfié complétant les modèles existants, que nous appliquons à la simulation numérique du transport de particules de poussière lors d'un accident de perte de vide.

Avant d'explicitier plus précisément nos objectifs et notre démarche, nous présentons ici la théorie cinétique des gaz, sur laquelle s'appuie notre modélisation, ainsi que les différents modèles d'aérosols.

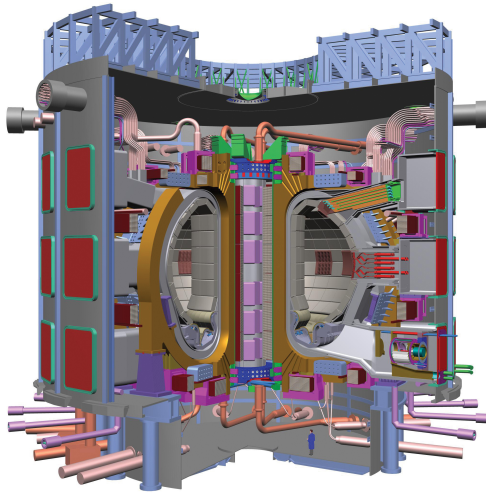


FIG. 1 – Schéma du futur réacteur ITER (source : www.iter.org).

¹D'autres valeurs caractéristiques sont également utilisées dans le cadre des études de sûreté d'ITER. Les résultats d'analyse de la distribution en taille de poussières provenant de trois tokamaks en activité présentés dans [MP] font apparaître une taille de poussières comprise entre 0.3 et 3 μm .

2. La théorie cinétique

Cette présentation est en partie inspirée de la synthèse de Cédric Villani, *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory* [V1].

2.1. Description mésoscopique d'un gaz

Commençons par présenter les différentes approches permettant la description d'un gaz. D'un point de vue microscopique, ce gaz est constitué d'un ensemble de N particules en interaction. L'application des lois de la mécanique newtonienne à ces particules aboutit à l'établissement d'un système d'équations décrivant les trajectoires des particules. Cependant, en raison du très grand nombre de particules, ce système se révèle très compliqué à étudier tant analytiquement que numériquement. D'un point de vue macroscopique, ce gaz peut être vu comme un milieu continu ; l'établissement de bilans pour un volume infinitésimal de fluide aboutit à l'établissement des équations hydrodynamiques (équations d'Euler pour un gaz non visqueux, ou de Navier-Stokes pour un gaz visqueux). Ces équations aux dérivées partielles décrivent l'évolution spatiale et temporelle de paramètres macroscopiques du gaz (masse volumique, quantité de mouvement, énergie). Pour plus de détails concernant ces équations hydrodynamiques, le lecteur pourra consulter les ouvrages de Landau et Lifshich [LL] ou de Lions [Li]. Cependant, cette approche suppose que le gaz est à l'équilibre thermodynamique local, au sens où les vitesses des particules contenues dans un volume infinitésimal de gaz sont réparties suivant une loi gaussienne. Or, une condition nécessaire pour que le gaz soit à l'équilibre thermodynamique est que la dimension caractéristique L du système considéré soit très grande devant le libre parcours moyen du gaz λ , qui est la distance moyenne entre deux collisions de molécules (nous reviendrons sur le terme de collision dans le paragraphe suivant). Ce critère se traduit à l'aide du nombre de Knudsen défini par

$$K_n = \frac{\lambda}{L}.$$

Les équations hydrodynamiques ne sont donc valables que sous la condition nécessaire $K_n \ll 1$.

La théorie cinétique, introduite par Maxwell et Boltzmann, permet de décrire le gaz à une échelle dite mésoscopique, intermédiaire entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Cette théorie consiste à décrire l'évolution des particules constituant le gaz, que l'on suppose ici identiques ², par une fonction de densité $f(t, x, v)$ où $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ désigne la position de ces particules, $v \in \mathbb{R}^3$ leur vitesse, et $t \in \mathbb{R}^+$ le temps. D'autres variables, comme l'énergie interne ou le rayon des particules, peuvent être ajoutées à f pour décrire des phénomènes plus complexes. Cette fonction f , positive, peut être interprétée de deux manières différentes : on peut voir $f(t, x, v)dx dv$ comme une approximation de la densité réelle en particules dont la position et la vitesse sont situées dans l'élément de volume généralisé $dx dv$ centré en (x, v) au temps t , ou comme la densité de probabilité de présence de la particule sur l'espace des phase $\Omega \times \mathbb{R}^3$. On peut alors définir, sous réserve d'existence, des grandeurs macroscopiques locales, comme la densité locale $n_f(t, x)$ définie

²Nous reviendrons sur le cas de gaz composés de plusieurs espèces au §2.4 B

par

$$n_f(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv, \quad (1)$$

la vitesse macroscopique locale $\mathbf{u}_f(t, x)$ définie par

$$n_f(t, x) \mathbf{u}_f(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} v f(t, x, v) dv, \quad (2)$$

et la température cinétique $T_f(t, x)$ définie par

$$n_f(t, x) T_f(t, x) = \frac{m}{3k_B} \left[\int_{\mathbb{R}^3} (v - \mathbf{u}_f(t, x))^2 f(t, x, v) dv \right], \quad (3)$$

où m est la masse d'une particule, et k_B la constante de Boltzmann (égale à $1,3806 \cdot 10^{-23}$ J·K⁻¹). On suppose a minima sur f que pour toute partie bornée K de Ω , on a

$$\int_K n_f(t, x) dx < +\infty, \quad (4)$$

ce qui traduit le fait qu'un domaine fini de l'espace ne contient qu'une masse finie de matière (autrement dit, f est une mesure finie sur $K \times \mathbb{R}^3$).

Lorsque les particules ne sont soumises à aucune force extérieure et qu'elles n'interagissent pas entre elles, les positions x_p et vitesses v_p de chaque particule vérifient

$$\begin{cases} \frac{dx_p}{dt} = v_p, \\ \frac{dv_p}{dt} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

On peut alors montrer que la densité f est constante le long des lignes caractéristiques d'équations données par les relations (5). Si $\Omega = \mathbb{R}^3$, la fonction f vérifie donc la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall v \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad f(t, x, v) = f(0, x - vt, v).$$

On en déduit que f est solution de l'équation de transport libre

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = 0. \quad (6)$$

Lorsqu'un champ de force extérieur \mathbf{F}_{ext} agit sur ces particules, l'équation (6) est modifiée pour devenir l'équation de Vlasov linéaire :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \mathbf{F}_{ext} \cdot \nabla_v f = 0. \quad (7)$$

2.2. L'opérateur de collision de Boltzmann

Supposons maintenant que les particules interagissent entre elles. Le potentiel d'interaction entre deux particules entraîne une déviation de leur trajectoire durant un bref intervalle de temps. Ce phénomène est appelé, par abus de langage, collision. Introduisons quelques hypothèses, qui permettent la dérivation de l'opérateur de Boltzmann élastique [Bi4, Ce2].

1. **Hypothèse de collisions binaires entre les particules.** Cette hypothèse consiste à supposer que le gaz est suffisamment dilué pour pouvoir négliger les collisions faisant intervenir plus de 2 particules. Cela revient à supposer que le diamètre d des particules est très petit devant la distance moyenne entre deux particules. Si n° est l'ordre de grandeur de la densité locale en nombre de particules (en m^{-3}), la distance moyenne entre deux particules δ s'exprime par la relation :

$$\delta = \frac{1}{(n^\circ)^{\frac{1}{3}}}. \quad (8)$$

On suppose donc que

$$n^\circ d^3 \ll 1. \quad (9)$$

2. **Hypothèse de collisions localisées en temps et en espace.** Cette hypothèse signifie que la durée typique d'une collision est négligeable devant le temps caractéristique considéré, et que l'étendue spatiale de la collision est négligeable devant l'échelle d'espace considérée. Mathématiquement, on suppose donc que la collision a lieu en un point x à un instant t .
3. **Hypothèse de chaos moléculaire.** Les vitesses de deux particules sur le point de collisionner ne sont pas être corrélées. Cette hypothèse implique que la densité de probabilité jointe de deux particules de vitesses v et v_* en un point x est donnée par le produit de la fonction de distribution f en v et en v_* .
4. **Hypothèse de collisions élastiques.** La quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont préservées lors d'une collision. Ainsi, si on considère deux particules de vitesses pré-collisionnelles v et v_* et de vitesses post-collisionnelles v' et v'_* , ces lois de conservation se traduisent, compte tenu de la masse identique des particules, par les relations :

$$\begin{cases} v' + v'_* = v + v_*, \\ |v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2. \end{cases} \quad (10)$$

On déduit des équations (10) que la norme de la vitesse relative est conservée durant la collision, c'est-à-dire :

$$|v' - v'_*| = |v - v_*|. \quad (11)$$

De plus, ces équations permettent d'exprimer les vitesses post-collisionnelles v' et v'_* en fonction des vitesses pré-collisionnelles v et v_* et d'un paramètre. On utilise deux types de paramétrisation, représentées sur la figure 2 :

- ▷ la paramétrisation dite en σ : elle consiste à utiliser comme paramètre le vecteur de la sphère unité $\sigma = \frac{v' - v'_*}{|v' - v'_*|}$. Les expressions des vitesses post-collisionnelles sont alors, compte tenu de la relation (11),

$$\begin{cases} v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2}\sigma, \\ v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2}\sigma. \end{cases} \quad (12)$$

▷ la paramétrisation dite en ω : on utilise cette fois comme paramètre le vecteur de la sphère unité $\omega = \frac{v - (v')_\omega}{|v - (v')_\omega|}$, en notant $(v')_\omega$ et $(v'_*)_\omega$ les vitesses post-collisionnelles associées à v et v_* dans cette paramétrisation. Leurs expressions sont données par :

$$\begin{cases} (v')_\omega = v + ((v_* - v) \cdot \omega) \omega, \\ (v'_*)_\omega = v_* - ((v_* - v) \cdot \omega) \omega. \end{cases} \quad (13)$$

En notant $v_R = v_* - v$, on observe à partir des formules (13) que la vitesse relative post-collisionnelle est l'image de la vitesse relative pré-collisionnelle par la symétrie plane par rapport au plan orthogonal à ω , c'est-à-dire que $(v'_R)_\omega = v_R - 2[\omega \cdot v_R]\omega$. De plus, en introduisant l'opérateur linéaire T_ω agissant sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$T_\omega(v, v_*) = ((v')_\omega, (v'_*)_\omega), \quad (14)$$

on a, pour tout $\omega \in \mathbb{S}^2$, les propriétés suivantes :

$$T_\omega \circ T_\omega = \text{Id}, \quad (15)$$

$$|\det T_\omega| = 1, \quad (16)$$

$$T_\omega(v_*, v) = ((v'_*)_\omega, (v')_\omega). \quad (17)$$

5. Hypothèse de microréversibilité des collisions. On peut interpréter cette hypothèse de manière probabiliste : la probabilité que le couple de vitesses (v, v_*) se transforme en (v', v'_*) (ou $((v')_\omega, (v'_*)_\omega)$, suivant la paramétrisation choisie) lors d'une collision est la même que la probabilité que le couple de vitesses (v', v'_*) (ou $((v')_\omega, (v'_*)_\omega)$) se transforme en (v, v_*) .

A partir de ces hypothèses, on peut établir de façon heuristique l'expression de l'opérateur de collision de Boltzmann (voir [Ce1]). Celui-ci s'exprime, en paramétrisation σ , sous la forme :

$$\begin{aligned} Q(f, f)(t, x, v) \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f(t, x, v') f(t, x, v'_*) - f(t, x, v) f(t, x, v_*)] B(|v - v_*|, \cos(\chi)) d\sigma dv_*, \end{aligned} \quad (18)$$

où v' et v'_* sont données par (12) et où $\chi \in [0, \pi]$ est l'angle de déviation (représenté sur la figure 2), tel que

$$\cos(\chi) = \frac{(v - v_*) \cdot \sigma}{|v - v_*|}.$$

En paramétrisation ω , l'opérateur de collision s'écrit

$$\begin{aligned} Q(f, f)(t, x, v) \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f(t, x, (v')_\omega) f(t, x, (v'_*)_\omega) - f(t, x, v) f(t, x, v_*)] \\ \times 2B(|v - v_*|, -\cos(2\theta)) |\cos(\theta)| d\omega dv_* \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f(t, x, (v')_\omega) f(t, x, (v'_*)_\omega) - f(t, x, v) f(t, x, v_*)] B_\omega(|v - v_*|, \cos(\theta)) d\omega dv_*, \end{aligned} \quad (19)$$

$$(20)$$

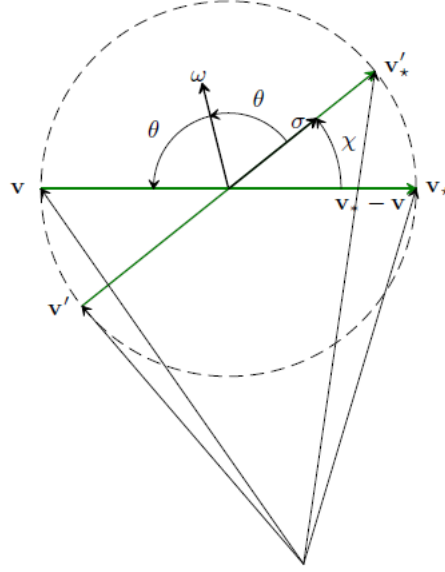


FIG. 2 – Lien entre les paramétrisations ω et σ des vitesses post-collisionnelles.

où $(v')_\omega$ et $(v'_*)_\omega$ sont données par (13) et

$$\cos(\theta) = \frac{(v - v_*) \cdot \omega}{|v - v_*|}.$$

Remarquons que l'opérateur $Q(f, f)$ ne dépend des variables x et t que par l'intermédiaire de f . La fonction B , positive, est appelée *noyau de collision*. L'expression de B est liée au paramètre d'impact p par la relation

$$B(|v - v_*|, \cos(\chi)) = |v - v_*| \frac{p}{\sin(\chi)} \left| \frac{dp}{d\chi} \right|.$$

Le terme

$$\varsigma = \frac{p}{\sin(\chi)} \left| \frac{dp}{d\chi} \right|$$

est appelé *section efficace de collision* (cf. Annexe A). Le paramètre d'impact p dépend du type d'interaction entre les particules, c'est-à-dire du potentiel d'interaction U entre celles-ci. Pour ce potentiel d'interaction $U(\rho)$, différentes formules ont été proposés.

- ▷ Dans le modèle dit de sphère dure, chaque particule est considérée comme une sphère rigide de rayon r , et la collision a lieu par contact entre les sphères. Ce cas correspond au modèle d'un “jeu de billard”. Le potentiel est alors infini pour $\rho = r$, et nul pour $\rho > r$. Dans ce cas, le noyau de collision est donné de façon simple en paramétrisation σ par l'expression

$$B(|v - v_*|, \cos(\chi)) = r^2 |v - v_*|,$$

et en paramétrisation ω par

$$B_\omega(|v - v_*|, \cos(\theta)) = 2r^2 |(v - v_*) \cdot \omega| = 2r^2 |v - v_*| |\cos(\theta)|.$$

On peut aussi définir de façon équivalente B_ω par

$$B_\omega(|v - v_*|, \cos(\theta)) = 4r^2 [(v - v_*) \cdot \omega] \mathbb{1}_{\{(v - v_*) \cdot \omega \geq 0\}}.$$

- ▷ Dans le modèle d'un potentiel dit “dur” d'interaction entre molécules, les molécules sont considérées comme des centres répulsifs, et l'expression de ce potentiel est de la forme

$$U(\rho) = \frac{K}{\rho^{s-1}}, \quad \text{avec } K > 0 \text{ et } s > 2.$$

Dans ce cas, le noyau de collision B peut être mis sous la forme [Ce2]

$$B(|v - v_*|, \cos(\chi)) = b(\cos(\chi)) |v - v_*|^\gamma,$$

où $\gamma = \frac{s-5}{s-1}$. La fonction b présente une singularité non intégrable lorsque $\chi \rightarrow 0$. Celle-ci est la conséquence des collisions rasantes durant lesquelles les molécules sont très peu déviées. Pour remédier à cela, on utilise l'hypothèse simplificatrice connue sous le nom de troncature angulaire de Grad [Gr1] qui consiste à négliger les interactions à longue portée de telle sorte que

$$\int_0^\pi b(\cos(\chi)) \sin(\chi) d\chi < +\infty.$$

Un cas intéressant est obtenu lorsque $\gamma = 0$, c'est-à-dire $s = 5$: dans ce cas, le noyau de collision ne dépend plus de la vitesse relative. Ce modèle est appelé modèle de molécules maxwelliennes. C'est un modèle théorique, mais qui permet souvent de mener à bien des calculs explicites.

- ▷ On peut citer également le potentiel de Lennard-Jones

$$U(r) = k \left[\left(\frac{r}{\rho} \right)^{12} - \left(\frac{r}{\rho} \right)^6 \right],$$

qui est un modèle plus proche de la réalité que les modèles de potentiel dur dans le cas des gaz rares.

Les propriétés (15), (16) et (17) permettent d'intégrer, au moins formellement, l'opérateur $Q(f, f)$ contre une fonction test $\varphi(v)$, ce qui permet d'obtenir la relation :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f)(t, x, v) \varphi(v) dv \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} f f^* (\varphi' + \varphi^{*'} - \varphi - \varphi^*) B(|v - v_*|, \cos(\chi)) d\sigma dv dv_*, \end{aligned} \quad (21)$$

où l'on note $f = f(t, x, v)$, $f^* = f(t, x, v_*)$, $\varphi = \varphi(v)$, $\varphi^* = \varphi(v_*)$, $\varphi' = \varphi(v')$, $\varphi^{*'} = \varphi(v'_*)$. Cette expression permet de déterminer les invariants collisionnels de Q , c'est-à-dire les fonctions φ telles que pour toute fonction f ,

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f)(t, x, v) \varphi(v) dv = 0.$$

On remarque que les fonctions $v \mapsto 1$, $v \mapsto v$, $v \mapsto |v|^2$ sont des invariants collisionnels. Réciproquement, il est possible de montrer [DM] que tout invariant collisionnel appartient au sous espace vectoriel engendré par ces trois fonctions. Par ailleurs, l'expression (21) peut être symétrisée (et appliquée à une fonction φ qui dépend également de t et x) pour donner

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f)(t, x, v) \varphi(t, x, v) dv = & -\frac{1}{4} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (f' f^{*'} - f f^*) B(|v - v_*|, \cos(\chi)) \\ & \times (\varphi' + \varphi^{*'} - \varphi - \varphi^*) d\sigma dv dv_*, \end{aligned} \quad (22)$$

et on obtient en particulier l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f) \ln(f)(t, x, v) dv = & -\frac{1}{4} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (f' f^{*'} - f f^*) B(|v - v_*|, \cos(\chi)) \\ & \times \ln\left(\frac{f' f^{*'}}{f f^*}\right) d\sigma dv dv_*. \end{aligned}$$

On en déduit la propriété suivante [DM], équivalente du Théorème H de Boltzmann (cf. 2.3.C) :

Théorème 0.1 *Soit $f = f(t, x, v)$ positive telle que l'expression (23) soit définie. L'inégalité suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \int_{\mathbb{R}^3} Q(f, f) \ln(f)(t, x, v) dv \leq 0, \quad (23)$$

est vérifiée. L'égalité a lieu si et seulement si

$$f(t, x, v) = M_{n, \mathbf{u}, T} := n \left(\frac{2\pi k_B T}{m} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m|v - \mathbf{u}|^2}{2k_B T}\right), \quad (24)$$

où $n = n(t, x)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$, $T = T(t, x)$.

La distribution obtenue dans la propriété précédente est appelée maxwellienne locale de densité n , de vitesse macroscopique \mathbf{u} et de température T (ou seulement maxwellienne si n , \mathbf{u} , T ne dépendent pas de x et t).

2.3. L'équation de Boltzmann

Intéressons nous maintenant à l'équation de Boltzmann vérifiée par la densité en molécules d'un gaz soumis à un champ de force \mathbf{F}_{ext} :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \mathbf{F}_{ext} \cdot \nabla_v f = Q(f, f). \quad (25)$$

Dans la suite, on dira qu'une vitesse est dans la classe $[v, v + dv]$, où v a pour coordonnées (v^1, v^2, v^3) , si sa i -ème coordonnée est située dans l'intervalle $[v^i, v^i + dv^i]$ pour $i = 1, 2, 3$.

A. Conditions initiales et conditions aux limites

L'équation de Boltzmann est associée à la condition initiale

$$\forall x \in \Omega, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3, \quad f(0, x, v) = f_{in}(x, v),$$

et à une condition aux bords de l'ouvert Ω . Dans le cas d'un ouvert borné Ω , la frontière $\partial\Omega$ du domaine représente généralement une surface sur laquelle les molécules sont réfléchies ou absorbées. Le flux entrant dans Ω est relié au flux sortant à travers un noyau $K(v \rightarrow v', x, t, t + \tau)$ représentant la probabilité qu'une molécule heurtant la surface avec une vitesse dans la classe $[v, v + dv]$ au point x et au temps t en ressorte au même endroit au temps $t + \tau$ avec une vitesse dans la classe $[v', v' + dv']$. On suppose ici τ suffisamment petit comparé au temps caractéristique d'évolution de f , de sorte que $K(v \rightarrow v', x, t, t + \tau)$ ne dépend pas de τ [Ce2]. La condition de réflexion est alors modélisée par la relation

$$(n(x) \cdot v) f(t, x, v) = \int_{n(x) \cdot u < 0} |n(x) \cdot u| f(t, x, u) K(u \rightarrow v, x, t) du, \quad (26)$$

pour $x \in \partial\Omega$, $n(x) \cdot v > 0$, où $n(x)$ est le vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'intérieur du domaine. Le cas où $K(u \rightarrow v, x, t) = 0$ correspond à une absorption totale des particules à la frontière du domaine. Dans ce cas, la condition aux limites s'écrit

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3 / n(x) \cdot v > 0 : \quad f(t, x, v) = 0.$$

Lorsque la surface restitue toutes les molécules, la probabilité totale pour qu'une particule soit réémise est égale à 1, c'est-à-dire

$$\int_{n \cdot v > 0} K(u \rightarrow v, x, t) dv = 1 \quad \text{pour} \quad n \cdot u < 0. \quad (27)$$

Les conditions de réflexion les plus courantes vérifiant (27) sont les conditions de réflexion spéculaire et réflexion diffuse. Dans le modèle de réflexion spéculaire, le noyau K est donné par

$$K(u \rightarrow v, x, t) = \delta(v - u - 2n(n \cdot u)),$$

ce qui correspond à imposer la condition aux limites

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3 / n(x) \cdot v > 0 : \quad f(t, x, v) = f(t, x, v - 2(n(x) \cdot v)n(x)).$$

Dans le modèle de réflexion diffuse, le noyau K est défini avec

$$K(u \rightarrow v, x, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{k_B T} \right)^2 (n(x) \cdot v) \exp \left(\frac{-mv^2}{2k_B T} \right) \mathbb{1}_{\{n(x) \cdot v \geq 0\}}, \quad (28)$$

où m est la masse d'une molécule et k_B la constante de Boltzmann (voir l'annexe B pour une preuve de cette expression). D'un point de vue physique, cela revient à supposer que les molécules incidentes sont absorbées par le mur et réémises avec une vitesse dont la distribution est une demi-maxwellienne à la température T de la surface de la paroi. Celle-ci ne dépend donc pas de la vitesse incidente de la molécule. Ainsi, d'après (26), on obtient

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3 / n(x) \cdot v > 0 : \quad f(t, x, v) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{k_B T} \right)^2 \mu(t, x) \exp \left(\frac{-mv^2}{2k_B T} \right),$$

où

$$\mu(t, x) = \int_{n(x) \cdot u < 0} |n(x) \cdot u| f(t, x, u) du.$$

On considère également parfois la condition dite de Maxwell, qui consiste à supposer qu'une fraction α des molécules est réfléchie spéculairement, tandis que le reste subit une réflexion diffuse. On a alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3 / n(x) \cdot v > 0 :$$

$$f(t, x, v) = \alpha f(t, x, v - 2(n(x) \cdot v)n(x)) + \frac{(1-\alpha)}{2\pi} \left(\frac{m}{k_B T} \right)^2 \mu(t, x) \exp\left(\frac{-mv^2}{2k_B T} \right).$$

B. Conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique

Les fonctions $v \mapsto 1$, $v \mapsto v$ et $v \mapsto |v|^2$ étant des invariants collisionnels de $Q(f, f)$, on peut en déduire, dans le cas où $\mathbf{F}_{ext} = 0$, les relations (formelles) de conservation suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} n_f + \operatorname{div}_x (n_f \mathbf{u}_f) = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_f \mathbf{u}_f) + \operatorname{div}_x \left(\int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) v \otimes v dv \right) = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_f E_f) + \operatorname{div}_x \left(\int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) |v|^2 v dv \right) = 0, \quad (31)$$

où $E_f := |\mathbf{u}_f|^2 + \frac{3k_B}{m} T_f$. En particulier, la masse totale, la quantité de mouvement et l'énergie sont conservées au cours du temps lorsque $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \begin{pmatrix} n_f(t, x) \\ n_f(t, x) \mathbf{u}_f(t, x) \\ n_f(t, x) E_f(t, x) \end{pmatrix} dx = 0.$$

C. Théorème H de Boltzmann

Posons ici

$$S(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) \ln(f(t, x, v)) dv,$$

$$\eta(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} v f(t, x, v) \ln(f(t, x, v)) dv,$$

et

$$\mathcal{H}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) \ln(f(t, x, v)) dv dx.$$

On déduit alors du Théorème 0.1 que

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t, x) + \operatorname{div}_x (\eta(t, x)) \leq 0,$$

et donc en particulier que l'entropie \mathcal{H} est une fonction décroissante. Cette propriété est connue sous le nom de **Théorème H de Boltzmann**.

2.4. Extension à des milieux plus complexes

A. Gaz constitués de molécules polyatomiques

Le modèle précédent peut être affiné dans le cas de gaz composés de molécules diatomiques ou polyatomiques. En effet, il convient dans ce cas d'introduire une énergie de rotation et éventuellement une énergie de vibration pour chaque molécule. On ajoute alors à la fonction de densité une variable supplémentaire correspondant à l'énergie interne. Lors d'une collision, l'énergie totale (somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique) est conservée, et on distingue les collisions élastiques (où chacune des énergies, interne et cinétique, est conservée) des collisions inélastiques (dans lesquelles s'effectue un échange entre ces deux types d'énergie). Le modèle de Larsen Borgnakke [Bi4] est couramment utilisé dans cette situation.

B. Mélanges gazeux

On peut également étendre le modèle précédent à un mélange de gaz en introduisant une fonction de densité f_i par espèce, les interactions entre les différents types de molécules étant prises en compte dans des opérateurs $R_{i,j}(f_i, f_j)$. Si les molécules constituant le mélange possèdent des masses différentes, les relations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie (10) sont dans ce cas modifiées en conséquence. Nous renvoyons à [Gio] pour plus de détails.

C. Milieux granulaires

Le terme de milieux granulaires (ou encore gaz granulaires) désigne un système de particules dont l'interaction est accompagnée d'une dissipation d'énergie due par exemple à des frottements entre particules. C'est le cas entre autres du sable et de la neige. L'utilisation de modèles cinétiques pour décrire de tels matériaux est relativement récente. Dans ces modèles de gaz granulaire, les particules sont considérées comme des sphères dures de même rayon r qui collisionnent de façon inélastique. Cette dissipation d'énergie entraîne des effets très différents de ceux habituellement observés dans les mélanges gazeux classiques. On observe notamment des états d'équilibre qui ne sont pas des distributions maxwelliennes, et pouvant même, dans certains cas, être des masses de Dirac localisées à la vitesse moyenne des particules [To]. De ces états d'équilibre non maxwelliens découlent des comportements remarquables. Ces effets surprenants en dynamique des gaz granulaires sont décrits dans l'article de Barrat, Trizac et Ernst [BT]. Nous renvoyons également le lecteur à l'article de Pulvirenti [Pu2], ainsi qu'à ceux de Cercignani [Ce3] et de Villani [V2] pour une présentation des aspects mathématiques des gaz granulaires.

De manière générale, la distribution f de particules du gaz granulaire est solution de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v(\mathbf{F}f) = Q_G(f, f),$$

dans laquelle $Q_G(f, f)$ et \mathbf{F} sont respectivement l'opérateur de collision inélastique entre les particules et une force (de friction par exemple) agissant sur les particules. L'aspect granulaire est pris en compte via l'introduction d'un paramètre de restitution e compris

entre 0 et 1, défini par

$$((v')_\omega - (v'_*)_\omega) \cdot \omega = -e (v - v_*) \cdot \omega,$$

où (v, v_*) et $((v')_\omega, (v'_*)_\omega)$ sont les vitesses des particules respectivement avant et après la collision, et où ω est la direction d'impact ($\omega = (\mathbf{c}_* - \mathbf{c})/|\mathbf{c}_* - \mathbf{c}|$ où \mathbf{c} et \mathbf{c}_* sont les centres des particules). Ce coefficient e peut dépendre du module de la vitesse relative $|v - v_*|$ ainsi que de la température cinétique du gaz. Les vitesses post-collisionnelles peuvent alors être exprimées dans cette paramétrisation par

$$\begin{cases} (v')_\omega = v + \frac{1+e}{2} ((v_* - v) \cdot \omega) \omega, \\ (v'_*)_\omega = v_* - \frac{1+e}{2} ((v_* - v) \cdot \omega) \omega. \end{cases} \quad (32)$$

La dissipation d'énergie cinétique est par conséquent égale à

$$\frac{|(v')_\omega|^2}{2} + \frac{|(v'_*)_\omega|^2}{2} - \frac{|v|^2}{2} - \frac{|v_*|^2}{2} = - \left(\frac{1-e^2}{4} \right) ((v - v_*) \cdot \omega)^2.$$

Remarquons que la valeur $e = 1$ correspond au cas d'une collision élastique et que la valeur $e = 0$ correspond au cas de collisions dites collantes (les particules restent collées après la collision). On peut également utiliser une paramétrisation de type σ . Les expressions des vitesses post-collisionnelles sont dans ce cas définies avec

$$\begin{cases} (v')_\sigma = \frac{v + v_*}{2} + \left(\frac{1-e}{4} \right) (v - v_*) + \left(\frac{1+e}{4} \right) |v - v_*| \sigma, \\ (v'_*)_\sigma = \frac{v + v_*}{2} - \left(\frac{1-e}{4} \right) (v - v_*) - \left(\frac{1+e}{4} \right) |v - v_*| \sigma. \end{cases} \quad (33)$$

L'opérateur de collision de Boltzmann granulaire s'exprime en fonction des vitesses pré-collisionnelles données par :

$$\begin{cases} (v)_\sigma = \frac{v + v_*}{2} + \left(\frac{1-e}{4e} \right) (v - v_*) + \left(\frac{1+e}{4e} \right) |v - v_*| \sigma, \\ (v_*)_\sigma = \frac{v + v_*}{2} - \left(\frac{1-e}{4e} \right) (v - v_*) - \left(\frac{1+e}{4e} \right) |v - v_*| \sigma. \end{cases} \quad (34)$$

Contrairement au cas de collisions élastiques, les expressions de $(v)_\sigma$ et $(v_*)_\sigma$ ne coïncident pas avec celles de $(v')_\sigma$ et $(v'_*)_\sigma$: la transformation $(v, v_*) \rightarrow ((v')_\sigma, (v'_*)_\sigma)$ n'est pas involutive. L'opérateur de collision Q_G s'exprime alors sous la forme :

$$Q_G(f, f) = r^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{1}{e^2} f((v)_\sigma) f((v_*)_\sigma) - f(v) f(v_*) \right) |v - v_*| d\sigma dv_*,$$

où r est le rayon de particules. Le noyau de collision $|v - v_*|$ est caractéristique du modèle de sphères dures. Les collisions sont supposées ici être localisées en temps et en espace : ainsi l'opérateur Q_G ne dépend des variables x et t qu'à travers la fonction de densité f . De plus, la forme de l'opérateur reflète l'hypothèse de chaos moléculaire (les vitesses pré- et post-collisionnelles ne sont pas corrélées). Ces hypothèses de chaos moléculaire et de collisions localisées en espace sont cependant moins légitimes dans le cas des gaz granulaires

que dans le cas de mélanges gazeux, en raison de la taille macroscopique des particules. On peut alors tenir compte de délocalisations en espace des collisions en introduisant une fonction de corrélation $G(x, y)$ entre les points x et y , définie par la relation

$$f^{(2)}(t; x, v; y, w) = G(x, y) f(t, x, v) f(t, y, w), \quad (35)$$

où $f^{(2)}$ est la fonction de distribution jointe de deux particules. On obtient ainsi l'opérateur de collision d'Enskog, d'expression :

$$Q_E(f, f) = r^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{1}{e^2} G(x, x - r\omega) f(x, v) f(x - r\omega, v_*) \right. \\ \left. - G(x, x + r\omega) f(x, v) f(x + r\omega, v_*) \right) |v - v_*| d\sigma dv_*,$$

dans lequel ω est la direction d'impact et r le rayon des particules. Cet opérateur est cependant beaucoup plus difficile à étudier d'un point de vue théorique que l'opérateur de Boltzmann granulaire Q_G .

3. Les modèles d'aérosols

Présentons maintenant les modèles développés pour l'étude des aérosols (ou sprays). Un aérosol est un ensemble de particules solides ou de type gouttelettes en suspension dans un gaz. On peut distinguer différentes approches suivant le type d'équations aux dérivées partielles utilisées pour décrire le gaz et les particules.

Modèles fluides

Une première approche consiste à décrire le mélange gaz-particules comme un fluide diphasique et à utiliser des équations hydrodynamiques (Euler, Navier-Stokes ou Stokes) pour décrire chacune des deux phases. On peut citer par exemple le modèle de Gidaspow [Gid], ou le modèle de Baer-Nunziato [BN], utilisé pour les situations de détonation-déflagration de gaz chargés en poussières. Cette approche a été utilisée au laboratoire LTMF du CEA par J.R Garcia-Cascales, J. Mulas-Pérez et H. Paillère [GM], notamment pour éventuellement modéliser la mobilisation de poussières dans le réacteur ITER. En supposant que les poussières sont des particules solides sphériques et incompressibles et que la pression est négligeable dans la phase constituée de particules, alors les équations du modèle de Baer-Nunziato se simplifient pour conduire au système fluide suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g) + \operatorname{div}_x (\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g) &= 0, \\ \frac{\partial (\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g)}{\partial t} + \operatorname{div}_x (\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g \otimes \mathbf{u}_g + \alpha_g p \mathbf{I}) &= p \nabla_x \alpha_g + \alpha_g \rho_g \mathbf{g} - \mathbf{F}_{gd}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g E_g) + \operatorname{div}_x (\alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g H_g) &= -p \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \alpha_g \rho_g \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{g} - \mathbf{F}_{gd} \cdot \mathbf{u}_p, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_p \rho_p) + \operatorname{div}_x (\alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p) + \operatorname{div}_x (\alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p \otimes \mathbf{u}_p) &= \alpha_p \rho_p \mathbf{g} + \mathbf{F}_{gd}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_p \rho_p E_p) + \operatorname{div}_x (\alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p E_p) &= \alpha_p \rho_p \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{g} + \mathbf{F}_{dg} \cdot \mathbf{u}_p.\end{aligned}$$

où $\rho_g(t, x)$ et $\rho_p(t, x)$ sont les densités de chaque phase, $\alpha_g(t, x)$ et $\alpha_p(t, x)$ sont leurs fractions volumiques ($\alpha_g + \alpha_p = 1$), $\mathbf{u}_g(t, x)$ et $\mathbf{u}_p(t, x)$ sont leurs vitesses, $E_g(t, x)$ est l'énergie totale du gaz ($E_g = e_g + \frac{1}{2} |\mathbf{u}_g|^2$, où $e_g(t, x)$ est l'énergie interne spécifique du gaz), $E_p(t, x)$ est l'énergie totale de la phase de particules ($E_p = c_m T_p + \frac{1}{2} |\mathbf{u}_p|^2$, où c_m est la chaleur spécifique des poussières et T_p leur température), p est la pression du gaz, $H_g(t, x)$ est l'enthalpie totale du gaz ($H_g = h_g + \frac{1}{2} |\mathbf{u}_g|^2$, où h_g est l'enthalpie spécifique du gaz), \mathbf{g} est le vecteur gravité, et \mathbf{F}_{gd} est la force de traînée du gaz sur les particules. Plusieurs expressions empiriques ont été proposées pour décrire cette force de traînée, comme par exemple la formule de Otterman et Levinet [OL] :

$$\mathbf{F}_{gd} = \frac{\alpha_g \rho_g}{m_p} \frac{\pi d_p}{8} C_D (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p) |\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p|,$$

où le coefficient de traînée C_D est ici pris égal à $C_D = 0,48 + 28R_e^{-0,85}$ (R_e étant le nombre de Reynolds défini avec les grandeurs caractéristiques ad hoc). Dans l'étude [GM], la fraction volumique en particules est considérée comme négligeable devant celle du gaz (ce qui conduit à prendre $\alpha_g(t, x) = 1$), et le gaz est modélisé par un gaz parfait, c'est-à-dire

$$\rho_g = \frac{p}{(\gamma_g - 1)e_g},$$

où γ_g est une constante qui définit le rapport entre les chaleurs spécifiques du gaz ($\gamma_g > 1$). Les simulations numériques dans [GM] sont réalisées à partir du code CASTEM, qui est un code basé sur une méthode de type volume fini.

Modèles fluides-cinétiques

Une seconde approche consiste à coupler une équation cinétique et une équation hydrodynamique. Cette approche est dite fluide-cinétique, ou gaz-particules, ou encore Eulerienne/Lagrangienne. Dans ce contexte, l'évolution des particules est décrite par une équation cinétique, et celle du gaz par des équations hydrodynamiques. Parmi ce type de modèle, on peut citer :

- ▷ les sprays dits fins polydispersés dans lesquels la fraction volumique de particules est négligeable devant celle du gaz. La masse de chaque particule n'est cependant pas négligeable. D'autre part, l'interaction entre le fluide et les particules est modélisée par la force de traînée de Stokes sur les particules

$$\mathbf{F}(v, r) = \frac{D_p}{m_p(r)} (\mathbf{u}_g - v),$$

où D_p est un coefficient empirique dépendant du fluide et des particules, appelé coefficient de traînée, $\mathbf{u}_g(t, x)$ la vitesse du gaz et $m_p(r)$ la masse d'une particule de rayon r . De plus, les interactions entre particules sont négligées. Les équations de ce modèle s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \operatorname{div}_x (\rho_g \mathbf{u}_g) = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial (\rho_g \mathbf{u}_g)}{\partial t} + \operatorname{div}_x (\rho_g \mathbf{u}_g \otimes \mathbf{u}_g) + \nabla_x p = - \iint m_p(r) f(t, x, v, r) \mathbf{F}(v, r) dv dr, \quad (37)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (\mathbf{F} f) = 0, \quad (38)$$

où f est la densité en particules, $\rho_g(t, x)$ la densité du gaz et p sa pression. Nous renvoyons le lecteur à [H, Du1, Du2] pour plus de détails concernant ce modèle.

- ▷ les sprays modérément épais, dans lesquels les interactions entre particules ne sont plus négligées. Dans ce cas, les collisions entre particules sont prises en compte dans l'équation (38) par l'intermédiaire d'un opérateur de collision. Ce modèle est notamment utilisé pour l'étude des moteurs Diesel dans le code KIVA II [OA]. L'étude de solutions régulières pour les sprays modérément épais a été faite dans [Ma].

Modèles de sprays raréfiés

Dans ces modèles, le gaz est décrit par un modèle cinétique. On peut citer dans ce contexte des modèles proches de ceux utilisés pour les gaz granulaires, comme celui introduit par E. Ferrari, et L. Pareschi [FP] pour l'étude de la diffusion d'impuretés dans un gaz. Dans celui-ci, le gaz est supposé être à l'équilibre thermodynamique, et la densité en molécules est alors une maxwellienne $f_b = M_{n_b, \mathbf{u}_b, T_b}$. Par ailleurs, la densité f en impuretés est solution d'une équation de Boltzmann linéaire donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} |(v - w) \cdot n| \left[\frac{1}{e^2} f(v_*) f_b(w_*) - f(v) f_b(w) \right] dw dn,$$

où $\delta = \frac{\delta_1 + \delta_b}{2}$ est la distance entre le centre d'une molécule et d'une impureté collisionnant, ε le nombre de Knudsen associé à ces collisions, et e le coefficient de restitution. La densité en impuretés a ici été supposée suffisamment faible pour pouvoir négliger les collisions entre ces impuretés.

Une autre approche pour décrire le transport de particules dans un gaz raréfié est utilisée par Frezzotti, Ostmo et Ytrhus dans [Fr]. Dans ce modèle, l'évolution du gaz y est décrite par une équation de Boltzmann tandis que celle des particules par une description eulérienne d'une équation de Vlasov.

4. Objectifs de ce travail et démarche

Les travaux de Takase [Ta], qui s'appuient sur une modélisation du transport de poussières par une approche Eulérienne/Lagrangienne ont mis en évidence numériquement le déplacement des particules de poussière déposées dans l'enceinte lors d'un accident de perte de vide. Il apparaît par ailleurs dans cette étude que les premières millisecondes suivant l'accident jouent un rôle décisif dans l'étude des phénomènes mis en jeu. Or, le gaz à l'intérieur de l'enceinte du réacteur se trouvant initialement à l'état raréfié, l'utilisation des équations hydrodynamiques se révèle mal adaptée pour décrire l'écoulement du gaz au moment de la perte de vide (et durant un certain laps de temps consécutif à cet accident).

On peut en effet calculer divers nombres de Knudsen associés à cette situation, comme par exemple

$$K_n = \frac{\lambda_g}{\delta_p},$$

où λ_g est le libre parcours moyen du gaz, $\delta_p = \frac{1}{(n_1^o)^{1/3}}$ la distance moyenne entre deux particules de poussière, considérée comme une dimension caractéristique de l'écoulement du gaz (les particules constituant des "obstacles" de taille macroscopique pour les molécules), et n_1^o l'ordre de grandeur de la densité en particules de poussière. Dans le cas d'une densité en nombre de particules $n_1^o = 10^{15} \text{ m}^{-3}$ et d'une densité en nombre de molécules $n_2^o = 10^{21} \text{ m}^{-3}$, on a $K_n^1 \approx 10^2$. On ne peut donc pas considérer le gaz comme un milieu continu dans ce contexte. Par ailleurs, dans le cas d'un accident de perte de vide, le gaz n'est pas à l'équilibre thermodynamique, et le modèle étudié par E. Ferrari et L. Pareschi dans [FP] semble donc lui aussi inadapté. De plus, ce modèle ne permet pas de tenir compte de l'influence des poussières sur l'évolution de la distribution en molécules.

D'un point de vue numérique, le déplacement de particules macroscopiques en atmosphère raréfiée a été simulé par des méthodes DSMC (Direct Simulation Monte-Carlo), comme dans [Cr] dans le cas des poussières de comètes, ou dans [BZ] dans le cas de gouttelettes dans un environnement à haute température. Cependant, dans ces modèles, l'influence du gaz sur le déplacement des poussières est prise en compte par une force de traînée, et la rétroaction des particules de poussière sur le gaz n'est pas prise en compte. Dans [Cr], cette force de traînée a pour expression

$$F_A(v) = \frac{1}{2} \pi a_d^2 |\mathbf{u}_g - v|^2 \rho_g C_D(\mathbf{u}_g - v),$$

où \mathbf{u}_g est la vitesse macroscopique du gaz, a_d le rayon des particules de poussière, et $C_D = C_D(S, T_d/T_g)$ le coefficient de traînée, déterminé en fonction des températures du gaz et des poussières T_g et T_d et de $S = |\mathbf{u}_g - v| / \sqrt{2k_B T_g / m_g}$, à partir de l'hypothèse que la distribution en gaz est une maxwellienne. Cette hypothèse n'est pas vérifiée dans notre situation. Dans [BZ], une correction (empirique) de la force de traînée de Stokes due à Cunningham [Cu] est utilisée, permettant d'étendre la validité de celle-ci lorsque le nombre de Knudsen augmente. Cependant, la validité de cette correction est discutée [Ts, LL, Ph].

Nous développons donc dans ce travail un modèle purement cinétique pour la mobilisation et le transport de particules de poussière en atmosphère raréfiée, que nous appliquons à la simulation numérique du début d'un accident de perte de vide.

Dans une première partie, nous proposons des modèles basés sur un couplage de deux équations de type Boltzmann, dont les opérateurs de collision sont établis au **Chapitre 1**. Nous établissons les équations sous l'hypothèse que les collisions entre molécules et particules de poussière sont élastiques, puis en modélisant ces collisions par un mécanisme de réflexion diffuse sur la surface des particules. Nous prouvons au **Chapitre 2** que dans le cas de collisions élastiques, le système homogène en espace possède des solutions qui vérifient des propriétés de conservation de l'énergie et de décroissance de l'entropie. Nous nous intéressons ensuite à la mise en œuvre numérique du couplage au **Chapitre 3** par une méthode de type Monte-Carlo. Nous faisons en particulier apparaître les difficultés

soulevées par la simulation de l'opérateur de collision entre les particules de poussière et les molécules (du point de vue des particules), qui sont liées à la grande différence de taille entre ces deux espèces.

Pour cette raison, nous introduisons dans la deuxième partie de ce travail un modèle asymptotique dans la limite où le rapport de masse entre les molécules et les particules de poussière tend vers zéro. Dans le **Chapitre 4**, nous procédons, après avoir introduit les différents ordres de grandeur intervenant dans le système, à un adimensionnement des différentes variables et grandeurs du système. Un couplage constitué d'une équation de Vlasov et d'une équation de type Boltzmann est obtenu à partir d'un développement asymptotique formel de l'opérateur de collision entre particules de poussière et molécules. Nous montrons au **Chapitre 5** que, sous certaines hypothèses, les solutions du système de type Boltzmann/Boltzmann homogène obtenues au Chapitre 2 convergent (dans un certain espace) vers un couple de densité solution du système asymptotique homogène. D'un point de vue mathématique, cela nécessite l'établissement d'une nouvelle variante de l'inégalité de Povzner [W1], adaptée à des collisions entre particules de masses très différentes. Dans le **Chapitre 6**, nous comparons numériquement les modèles de type Boltzmann/Boltzmann et Vlasov/Boltzmann précédemment obtenus. Ces modèles sont finalement simulés en 3D dans une situation d'accident de perte de vide. Le système asymptotique Vlasov/Boltzmann nous permet notamment de proposer une étude du décollement de particules de poussière adhérentes aux parois.

Partie I. Étude d'un couplage de type Boltzmann/Boltzmann

Chapitre 1.

Nous proposons dans ce Chapitre un premier modèle décrivant l'évolution spatio-temporelle du système gaz-poussières sous la forme d'un couplage de deux équations de type Boltzmann, dans lequel l'interaction entre les particules de poussière et le gaz est décrite à travers deux opérateurs de collision. On introduit pour cela la densité en nombre de particules de poussière $f_1 : (t, x, v, r) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times [r_{min}, r_{max}] \mapsto f_1(t, x, v, r) \geq 0$, où r est le rayon des particules, supposées sphériques, et celle en molécules de gaz $f_2 : (t, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto f_2(t, x, v) \geq 0$. Les équations décrivant le système s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_1 = R_1(f_1, f_2), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_2 = R_2(f_1, f_2) + Q(f_2, f_2). \end{cases} \quad (39)$$

L'opérateur $Q(f_2, f_2)$ modélise les collisions entre molécules de gaz, et est donné sous la forme classique

$$\begin{aligned} Q(f_2, f_2)(t, x, v) \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_2(t, x, v') f_2(t, x, v'_*) - f_2(t, x, v) f_2(t, x, v_*)] b \left(\frac{|\sigma \cdot (v - v_*)|}{|v - v_*|} \right) |v - v_*|^\gamma d\sigma dv_*, \end{aligned} \quad (40)$$

où

$$\begin{cases} v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2}\sigma, \\ v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2}\sigma. \end{cases}$$

Les collisions entre particules de poussière et molécules de gaz sont modélisées à travers les opérateurs $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$. Notons l'absence dans notre modèle d'un opérateur de collision entre particules de poussière : nous supposons en effet que la densité en nombre de particules de poussière est faible comparée à la densité en nombre de molécules, ce qui entraîne que le temps moyen entre deux collisions de particules de poussières est beaucoup plus grand que les autres échelles de temps du problème. L'objectif de la modélisation proposée dans ce Chapitre est d'établir les expressions des opérateurs de collision entre molécules et particules de poussière $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$. Nous nous intéressons à deux types de modèles :

Dans un premier modèle, nous considérons que les collisions entre molécules et particules sont élastiques. Les opérateurs $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$, que l'on notera sous cette hypothèse $R_1^e(f_1, f_2)$ et $R_2^e(f_1, f_2)$, sont alors similaires aux opérateurs de collision intervenant dans la théorie des mélanges gazeux. Nous supposons que la section de collision est une section de sphères dures, ce qui est le plus acceptable d'un point de vue physique. Ces opérateurs sont donnés par

$$\begin{aligned} R_1^e(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_1(t, x, v'_1, r) f_2(t, x, v'_2) - f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2)] \\ &\quad \times \frac{1}{2}(\varrho + r)^2 |\omega \cdot (v_2 - v_1)| d\omega dv_2, \end{aligned} \quad (41)$$

et

$$\begin{aligned} R_2^e(f_1, f_2)(t, x, v_2) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [f_1(t, x, v'_1, r) f_2(t, x, v'_2) - f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2)] \\ &\quad \times \frac{1}{2}(\varrho + r)^2 |\omega \cdot (v_2 - v_1)| dr d\omega dv_1, \end{aligned} \quad (42)$$

où

$$\begin{cases} v'_1 = v_1 + \frac{2\varepsilon(r)}{1 + \varepsilon(r)} [\omega \cdot (v_2 - v_1)] \omega, \\ v'_2 = v_2 - \frac{2}{1 + \varepsilon(r)} [\omega \cdot (v_2 - v_1)] \omega, \end{cases} \quad (43)$$

$\varepsilon(r)$ étant le rapport de masse entre une molécule et une poussière de rayon r , et ϱ le rayon des molécules.

Nous proposons ensuite un second modèle qui se veut plus adapté à la grande différence de taille entre une molécule et une particule de poussière. Pour cela, nous supposons que lors d'une collision entre une molécule et une particule de poussière, la vitesse relative post-collisionnelle de celles-ci est obtenue par un mécanisme de réflexion diffuse. De plus, nous supposons que la section de collision pré-collisionnelle est une section de sphères dures. A partir de ces hypothèses, nous établissons les expressions de ces opérateurs, notés

$R_1^d(f_1, f_2)$ et $R_2^d(f_1, f_2)$, en calculant les termes de gain et de perte lors d'une collision. On obtient celles-ci sous la forme :

$$\begin{aligned} R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, x, v_1^\circ, r) f_2(t, x, v_2^\circ) (r + \varrho)^2 B_p(v_1^\circ, v_2^\circ, v_1) dv_2^\circ dv_1^\circ \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \pi(r + \varrho)^2 |v_2 - v_1| dv_2, \end{aligned} \quad (44)$$

avec

$$\begin{aligned} B_p(v_1^\circ, v_2^\circ, v_1) &= \frac{2}{\pi} \beta^4 \left(\frac{1 + \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} \right)^4 \exp \left[-\beta^2 \left(\frac{1 + \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} \right)^2 (v_B - v_1)^2 \right] \\ &\quad \times \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (v_1^\circ - v_2^\circ)] [n \cdot (v_B - v_1)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1^\circ - v_2^\circ) \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_B - v_1) \geq 0\}} dn, \end{aligned} \quad (45)$$

dans le cas de l'opérateur de collision entre particules de poussière et molécules de gaz, et

$$\begin{aligned} R_2^d(f_1, f_2)(t, x, v_2) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, x, v_1^\circ, r) f_2(t, x, v_2^\circ) (r + \varrho)^2 B_m(v_1^\circ, v_2^\circ, v_2) dr dv_1^\circ dv_2^\circ \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \pi(r + \varrho)^2 |v_2 - v_1| dr dv_1, \end{aligned} \quad (46)$$

avec

$$\begin{aligned} B_m(v_1^\circ, v_2^\circ, v_2) &= \frac{2}{\pi} \beta^4 (1 + \varepsilon(r))^4 \exp \left[-\beta^2 (1 + \varepsilon(r))^2 (v_B - v_2)^2 \right] \\ &\quad \times \int_{\mathbb{S}^2} (n \cdot (v_2^\circ - v_1^\circ)) (n \cdot (v_B - v_2)) \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_2^\circ - v_1^\circ) \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_B - v_2) \geq 0\}} dn, \end{aligned} \quad (47)$$

dans le cas de l'opérateur de collision entre molécules et particules, où

$$v_B = \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} v_1^\circ + \frac{\varepsilon(r)}{1 + \varepsilon(r)} v_2^\circ, \quad (48)$$

et

$$\beta = \sqrt{\frac{m_2}{2k_B T_{surf}}}. \quad (49)$$

La température de surface T_{surf} des particules de poussière est supposée identique pour toutes les particules de poussière et constante au cours du temps. Il est ensuite possible d'obtenir des formes faibles de ces opérateurs, présentant des similarités avec l'expression d'un opérateur de Boltzmann Q_B du modèle des gaz granulaires. Celles-ci sont données par

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v, r) \varphi(v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [\varphi(v_1'') - \varphi(v_1)] f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \\ &\quad \times (r + \varrho)^2 h_n(w) [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} dndwdv_2 dv_1, \end{aligned} \quad (50)$$

dans laquelle v_1'' correspond à la vitesse post-collisionnelle d'une particule donnée par

$$v_1'' = \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} [v_1 + \varepsilon(r)v_2 - \varepsilon(r)w], \quad (51)$$

h_n une densité de probabilité, définie par

$$h_n(w) = \frac{2}{\pi} \beta^4 (n \cdot w) \exp(-\beta^2 |w|^2) \mathbb{1}_{\{n \cdot w \geq 0\}}, \quad (52)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} R_2^d(f_1, f_2)(t, x, v) \varphi(v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [\varphi(v_2'') - \varphi(v_2)] f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \\ &\quad \times (r + \varrho)^2 h_n(w) [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} dr dn dw dv_1 dv_2, \end{aligned} \quad (53)$$

où v_2'' correspond à la vitesse post-collisionnelle d'une molécule donnée par

$$v_2'' = \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} [v_1 + \varepsilon(r)v_2 + w]. \quad (54)$$

On peut finalement déduire de ces formes faibles une autre expression des opérateurs $R_1^d(f_1, f_2)$ et $R_2^d(f_1, f_2)$:

$$\begin{aligned} R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) &= \frac{2\beta^4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (v_1 - v_2)] [n \cdot w] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) > 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot w > 0\}} \\ &\quad \times (r + \varrho)^2 \left[f_1(t, x, v_1'', r) f_2(t, x, v_2'') \exp(-\beta^2 (v_1 - v_2)^2) \right. \\ &\quad \left. - f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \exp(-\beta^2 (v_1'' - v_2'')^2) \right] dn dw dv_2, \end{aligned} \quad (55)$$

et

$$\begin{aligned} R_2^d(f_1, f_2)(t, x, v_2) &= \frac{2\beta^4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [n \cdot (v_2 - v_1)] [n \cdot w] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_2 - v_1) > 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot w > 0\}} \\ &\quad \times (r + \varrho)^2 \left[f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \exp(-\beta^2 (v_1'' - v_2'')^2) \right. \\ &\quad \left. - f_1(t, x, v_1'', r) f_2(t, x, v_2'') \exp(-\beta^2 (v_1 - v_2)^2) \right] dr dn dw dv_1, \end{aligned} \quad (56)$$

dans lesquelles (v_1'', v_2'') est donné par (51) et (54). Comme dans le cas de l'opérateur Q_B , les collisions sont inélastiques. Mais contrairement à celui-ci, les collisions ne sont pas planes. Par ailleurs, nous introduisons également une variante de ces opérateurs, inspirée des opérateurs à section maxwellienne, que l'on notera $R_1^{dm}(f_1, f_2)$ et $R_2^{dm}(f_1, f_2)$. Ces opérateurs, dont la vocation est de valider les calculs numériques effectués au Chapitre 3, sont donnés sous forme faible par

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} R_1^{dm}(f_1, f_2)(t, x, v, r) \varphi(v) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} C_m(r) [\varphi(v_1'') - \varphi(v_1)] f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) h_n(w) dn dw dv_2 dv_1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} R_2^{dm}(f_1, f_2)(t, x, v) \varphi(v) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} C_m(r) [\varphi(v_2'') - \varphi(v_2)] f_1(t, v_1, x, r) f_2(t, v_2, x) h_n(w) dr dndw dv_2 dv_1, \end{aligned}$$

où C_m est une fonction positive de la variable r et (v_1'', v_2'') est donné par (51) et (54).

Chapitre 2.

Nous nous intéressons dans ce Chapitre à l'étude de l'existence de solutions au système homogène en espace composé des équations

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} = R_1^e(f_1, f_2), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = R_2^e(f_1, f_2) + Q(f_2, f_2), \end{cases} \quad (57)$$

d'inconnues $f_1 := f_1(t, v, r) \geq 0$ (la densité en grains de poussières) et $f_2 := f_2(t, v) \geq 0$ (la densité en molécules), avec $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \Omega$ un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^3 , $v \in \mathbb{R}^3$, et $r \in [r_{min}, r_{max}]$ avec $0 < r_{min} < r_{max}$. Les opérateurs de collision Q , R_1^e , et R_2^e sont ceux introduits au Chapitre 1 : Q est l'opérateur de collision entre molécules de gaz, donné par

$$\begin{aligned} Q(f_2, f_2)(t, v) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_2(t, v') f_2(t, v'_*) - f_2(t, v) f_2(t, v_*)] \\ &\quad \times b \left(\frac{(v - v_*) \cdot \sigma}{|v - v_*|} \right) |v - v_*|^\delta d\sigma dv_*, \end{aligned}$$

où le noyau b vérifie $b \in L^2([-1, 1], \delta \in]0, 1])$ et

$$\begin{cases} v' &= \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \\ v'_* &= \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \end{cases} \quad (58)$$

et R_1^e et R_2^e les opérateurs correspondant au modèle de collisions élastiques entre molécules et particules de poussière, donnés par

$$\begin{aligned} R_1^e(f_1, f_2)(t, v_1, r) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_1(t, v'_1, r) f_2(t, v'_2) - f_1(t, v_1, r) f(t, v_2)] \\ &\quad \times \frac{1}{2} (r + \varrho)^2 |\omega \cdot (v_2 - v_1)| d\omega dv_2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_2^e(f_1, f_2)(t, v_2) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [f_1(t, v'_1, r) f_2(t, v'_2) - f_1(t, v_1, r) f_2(t, v_2)] \\ &\quad \times \frac{1}{2} (r + \varrho)^2 |\omega \cdot (v_2 - v_1)| dr d\omega dv_1, \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} v'_1 &= v_1 + \frac{2\varepsilon(r)}{1+\varepsilon(r)}[\omega \cdot (v_2 - v_1)]\omega, \\ v'_2 &= v_2 - \frac{2}{1+\varepsilon(r)}[\omega \cdot (v_2 - v_1)]\omega. \end{cases}$$

Nous avons ici supposé que la section de collision entre les molécules et les poussières était une section de sphères dures, alors que la section de collision entre les molécules est issue d'un potentiel d'interaction dur.

L'étude de l'existence et de l'unicité de solutions à l'équation de Boltzmann homogène en espace a été amorcée par Carleman dans [Ca]. Une théorie plus moderne, basée sur l'étude des moments de f a ensuite été introduite par Arkeryd [Ar]. Une référence générale pour cette théorie est [Ce1], ou plus récemment [CeP]. Dans celle-ci, la conservation de l'énergie cinétique repose sur une inégalité introduite par Povzner [Po], qui permet de contrôler les moments de la solution : si celle-ci possède à l'instant initial un moment d'ordre $s > 2$ bornée, alors le moment d'ordre s de la solution est borné à chaque instant. Cette inégalité a ensuite été raffinée par Elmroth [El] dans le cas du modèle VHS, puis par Desvillettes [De2] dans le cas plus général d'un potentiel dur ou de sphères dures. Cette inégalité de Povzner améliorée permet de montrer que si la donnée initiale possède un moment d'ordre $s > 2$ initialement borné, alors tous les moments de la solution le sont à tout instant. Ce résultat a ensuite été généralisé par Wennberg [W2] sous l'hypothèse d'un moment d'ordre 2 borné. D'autres méthodes pour montrer la conservation de l'énergie cinétique à partir d'une donnée initiale possédant un moment d'ordre 2 borné (et sous l'hypothèse de troncature angulaire de Grad sur le noyau de l'opérateur de Boltzmann) ont par ailleurs été fournis dans [MiW] ou [Lu]. Sous ces mêmes hypothèses, [MiW] prouve également l'unicité de la solution.

Nous prouvons ici l'existence de solutions au couplage (57) dans le même esprit que dans [Ar]. Plus précisément, nous montrons la Proposition suivante :

Proposition 0.1 *Soit $f_{1,in} := f_{1,in}(v, r) > 0$ une condition initiale telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_{1,in}(v, r) \left(1 + |v|^2 + |\ln f_{1,in}(v, r)|\right) dr dv < +\infty,$$

et $f_{2,in} := f_{2,in}(v) > 0$ une condition initiale telle que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) \left(1 + |v|^2 + |\ln f_{2,in}(v)|\right) dv < +\infty.$$

Alors pour toutes constantes $\delta \in]0, 1]$, $0 < r_{min} < r_{max}$ (apparaissant dans la définition de R_1^e, R_2^e, Q) et tout noyau $b \in L^2(]-1, 1])$, il existe une solution faible $(f_1 : (t, r, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times [r_{min}, r_{max}] \mapsto f_1(t, v, r) \geq 0, f_2 : (t, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \mapsto f_2(t, v) \geq 0)$ à (57) telle que

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, v, r) \left(1 + |v|^2 + |\ln f_1(t, v, r)|\right) dr dv < +\infty,$$

et

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) \left(1 + |v|^2 + |\ln f_2(t, v)|\right) dv < +\infty.$$

De plus, cette solution satisfait, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, les relations de conservation de la masse suivantes : pour presque tout $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, v, r) dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_{1,in}(v, r) dv, \quad (59)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) dv, \quad (60)$$

et l'inégalité d'entropie suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1(t, v_1, r) \ln(f_1(t, v_1, r)) dr dv_1 + \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v_2) \ln(f_2(t, v_2)) dv_2 \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_{1,in}(v_1, r) \ln(f_{1,in}(v_1, r)) dr dv_1 + \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v_2) \ln(f_{2,in}(v_2)) dv_2. \end{aligned} \quad (61)$$

Pour finir, s'il existe $s \geq 1$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} (1 + |v|^2)^s [f_{1,in}(v, r) + f_{2,in}(v)] dr dv < +\infty,$$

alors on peut trouver (f_1, f_2) tels que pour tout $T > 0$

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} (1 + |v|^2)^s [f_1(t, v, r) + f_2(t, v)] dr dv < +\infty, \quad (62)$$

et la relation de conservation de l'énergie suivante est vérifiée pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1(t, v, r) |v|^2 \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^3 dr dv + \varepsilon_m \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) |v|^2 dv \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_{1,in}(v, r) |v|^2 \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^3 dr dv + \varepsilon_m \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) |v|^2 dv, \end{aligned} \quad (63)$$

où $\varepsilon_m = \varepsilon(r_{\min})$. Par solution faible de (57) nous entendons ici que

$$(f_1, f_2) \in \text{Lip}(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^3 \times [r_{\min}, r_{\max}])) \times \text{Lip}(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^3)), \quad (64)$$

et que (f_1, f_2) vérifie, pour tout $t \geq 0$, et pour presque tout $v \in \mathbb{R}^3$, $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$,

$$f_1(t, v, r) = f_{1,in}(v, r) + \int_0^t R_1^e(f_1, f_2)(s, v, r) ds, \quad (65)$$

$$f_2(t, v) = f_{2,in}(v) + \int_0^t (Q(f_2, f_2)(s, v) + R_2^e(f_1, f_2)(s, v)) ds. \quad (66)$$

La preuve de cette Proposition est divisée en plusieurs étapes. Dans un premier temps, nous introduisons des opérateurs de collision à sections tronquées Q^n , R_1^n et R_2^n , et nous montrons que le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1^n}{\partial t} = \frac{R_1^n(f_1^n, f_2^n)(t, v, r)}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c(t)}, \\ \frac{\partial f_2^n}{\partial t} = \frac{Q^n(f_2^n, f_2^n)(t, v) + R_2^n(f_1^n, f_2^n)(t, v)}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c(t)}, \end{cases}$$

où

$$\|(f_1^n, f_2^n)\|_c(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} |f_1^n(t, v, r)|(1 + |v|^2) dr dv + \int_{\mathbb{R}^3} |f_2^n(t, v)|(1 + |v|^2) dv,$$

muni des conditions initiales

$$f_1^n(0, \cdot, \cdot) = f_{1,in}(v, r) \mathbb{1}_{\{f_{1,in} \leq n\}} + \frac{1}{n} \exp(-|v|^2), \quad (67)$$

$$f_2^n(0, \cdot) = f_{2,in}(v) \mathbb{1}_{\{f_{2,in} \leq n\}} + \frac{1}{n} \exp(-|v|^2), \quad (68)$$

possède une unique solution

$$(f_1^n, f_2^n) \in \mathcal{C}^1 \left(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^3 \times [r_{min}, r_{max}], (1 + |v|^2) dv dr) \times L^1(\mathbb{R}^3, (1 + |v|^2) dv) \right).$$

Nous montrons que cette solution est (strictement) positive en introduisant un autre système, du type

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial t} + \mu_1 g_1 = \Gamma_1^n(g_1, g_2), \\ \frac{\partial g_2}{\partial t} + \mu_2 g_2 = \Gamma_2^n(g_1, g_2), \end{cases} \quad (69)$$

de même conditions initiales (67)–(68), et où Γ_1^n et Γ_2^n sont choisis de telle sorte que (f_1^n, f_2^n) soit solution de (69) munis de ces conditions initiales, et qu'ils vérifient

$$\begin{cases} 0 \leq g_1 \leq \tilde{g}_1 \\ 0 \leq g_2 \leq \tilde{g}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_1^n(g_1, g_2) \leq \Gamma_1^n(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) \\ \Gamma_2^n(g_1, g_2) \leq \Gamma_2^n(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) \end{cases}.$$

On peut alors exprimer (f_1^n, f_2^n) comme la limite d'une suite croissante de fonctions positives. De plus, (f_1^n, f_2^n) vérifie des relations de conservation de la masse et de l'énergie, et de décroissance de l'entropie.

Dans un second temps, nous montrons, grâce au théorème de Dunford-Pettis, que l'on peut extraire de la suite $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi formée une sous-suite convergeant faiblement dans l'espace $L^1([0, t] \times \mathbb{R}^3 \times]r_{min}, r_{max}[, (1 + |v|^\gamma) dt dv dr) \times L^1([0, t] \times \mathbb{R}^3, (1 + |v|^\gamma) dt dv)$, pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $\gamma < 2$, vers un couple de densités (f_1, f_2) . On montre ensuite que (f_1, f_2) vérifie (64), (65) et (66).

La troisième étape consiste à prouver la relation d'entropie (61). Pour cela, nous montrons que pour tout $T > 0$, on peut extraire de la suite $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite telle que pour tout $t \in [0, T]$, $(f_1^n(t, \cdot, \cdot), f_2^n(t, \cdot))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge faiblement dans $L^1(\mathbb{R}^3 \times]r_{min}, r_{max}[, (1 + |v|^\gamma) dv dr) \times L^1(\mathbb{R}^3, (1 + |v|^\gamma) dv)$. Nous prouvons ensuite l'inégalité (61) en majorant, pour $t \in [0, T]$ et $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, v, r) \ln(f_1(t, v, r)) \mathbb{1}_{\{f_1(t, v, r) \in [\eta, \frac{1}{\eta}]\}} dv dr \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) \ln(f_2(t, v)) \mathbb{1}_{\{f_2(t, v) \in [\eta, \frac{1}{\eta}]\}} dv, \end{aligned}$$

et en passant à la limite lorsque $\eta \rightarrow 0$.

Finalement, on montre grâce à une inégalité de Povzner que sous l'hypothèse (62), la relation (63) est vérifiée.

La question de l'unicité des solutions n'est pas abordée dans ce Chapitre et est reportée à une étude ultérieure.

Chapitre 3.

Nous présentons dans ce Chapitre la mise en œuvre numérique du système de type Boltzmann/Boltzmann

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_1 = R_1(f_1, f_2), \quad (70)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_2 = R_2(f_1, f_2) + Q_{sd}(f_2, f_2), \quad (71)$$

dans lequel $f_1 := f_1(t, x, v)$ représente la densité en particules de poussière, $f_2 := f_2(t, x, v)$ la densité en molécules du gaz. On se restreint ici au cas de particules de poussière de même rayon, noté r_p , et on note ε le rapport de masse entre une molécule et une particule de poussière. Nous nous plaçons de plus dans la situation physique où l'ordre de grandeur de la densité en nombre de particules de poussière n_1° est très inférieure à celle en molécules n_2° , et où le rayon des particules r_p est très grand comparé à celui des molécules ϱ .

Les collisions entre molécules n'étant pas le point central de notre étude, nous modélisons celles-ci par un mécanisme collisionnel de sphères dures, ce qui correspond à un opérateur $Q_{sd}(f_2, f_2)$ donné par

$$\begin{aligned} & Q_{sd}(f_2, f_2)(t, x, v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_2(t, x, v') f_2(t, x, v'_*) - f_2(t, x, v) f_2(t, x, v_*)] \varrho^2 |v - v_*| d\sigma dv_*, \end{aligned} \quad (72)$$

où $v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma$, et $v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma$. Nous choisissons pour modéliser le mécanisme collisionnel entre les particules de poussière et les molécules le modèle dit de réflexion diffuse que nous avons introduit au Chapitre 1. Les opérateurs de collision $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$ sont donnés dans ce cas sous forme faible par

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} R_i(f_1, f_2)(t, x, v) \varphi(v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [\varphi(v_i'') - \varphi(v_i)] f_1(t, x, v_1) f_2(t, x, v_2) \\ &\quad \times \varsigma(v_1 - v_2, n) h_n(w) dndw dv_2 dv_1, \end{aligned} \quad (73)$$

pour $i = 1, 2$, où l'expression de h_n est donnée par

$$h_n(w) = \frac{2}{\pi} \beta^4 (n \cdot w) \exp(-\beta^2 |w|^2) \mathbb{1}_{\{n \cdot w \geq 0\}},$$

et où v_1'' et v_2'' sont les vitesses post-collisionnelles, d'expression :

$$v_1'' = \frac{1}{1 + \varepsilon} (v_1 + \varepsilon v_2 - \varepsilon w),$$

$$v_2'' = \frac{1}{1 + \varepsilon} (v_1 + \varepsilon v_2 + w).$$

Dans le cas d'une section de collision de sphères dures, la fonction ς est donnée par

$$\varsigma(v, n) = (r_p + \varrho)^2 [n \cdot v] \mathbb{1}_{\{n \cdot v > 0\}},$$

et les opérateurs R_1 et R_2 correspondent aux opérateurs R_1^d et R_2^d introduits au Chapitre 1. Nous nous intéresserons aussi au cas où les opérateurs R_1 et R_2 sont à section pseudo-maxwellienne, c'est-à-dire lorsque

$$\varsigma(v, n) = C_m,$$

où C_m est une constante strictement positive (les opérateurs R_1 et R_2 correspondent alors aux opérateurs R_1^{dm} et R_2^{dm} introduits au Chapitre 1). Ce modèle, qui n'a pas de signification physique, conduit par contre à des calculs explicites, ce qui nous permettra de valider notre méthode numérique.

Différentes méthodes numériques existent pour la simulation de l'équation de Boltzmann. Le nombre d'inconnues très élevé, le caractère non-linéaire de cette équation et les multiples intégrales apparaissant dans l'opérateur de collision amènent à utiliser dans de nombreux cas des méthodes probabilistes de type Monte Carlo. Celles-ci présentent l'avantage de réduire notamment le coût de calcul par rapport aux méthodes déterministes et de ne pas avoir à introduire de discrétisation dans l'espace des vitesses. Cependant, l'un des inconvénients majeurs de ces méthodes réside dans les importantes fluctuations des résultats dues à leur caractère aléatoire. Des méthodes déterministes sont par ailleurs développées, parmi lesquelles on peut citer les méthodes spectrales. Nous renvoyons à [PeR1] pour une présentation générale des méthodes de résolution numérique de l'équation de Boltzmann.

Nous utilisons ici pour résoudre le couplage (70)–(71) une méthode DSMC (Direct Simulation Monte-Carlo). Celle-ci est basée sur un splitting à chaque pas de temps entre la partie transport, qui correspond à la résolution des équations

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_1 = 0, \quad (74)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_2 = 0, \quad (75)$$

et les parties de collision, qui correspondent à la résolution des équations spatialement homogènes

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = R_1(f_1, f_2), \quad (76)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = R_2(f_1, f_2), \quad (77)$$

et

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = Q_{sd}(f_2, f_2). \quad (78)$$

De plus, on approche, comme dans les méthodes particulières, les densités initiales $f_{1,in}$ et $f_{2,in}$ par des sommes de masses de Dirac :

$$f_{i,in}(x, v) \simeq \sum_{k=1}^{N_i} \omega_i \delta(x - x_{i,in}^k) \delta(v - v_{i,in}^k).$$

Cette approximation est faite grâce à une méthode d'intégration numérique : méthode de quadrature, ou, dans notre cas, méthode de Monte-Carlo. Heuristiquement, cela revient à remplacer les distributions en molécules et particules de poussière par un nombre fini N_2

de molécules numériques (ou macro-molécules) et un nombre N_1 de particules numériques (ou macro-particules) respectivement. Les coefficients ω_i sont appelés représentativités (ou poids numériques) des molécules ou particules numériques. Nous les choisissons ici identiques au sein de chaque espèce, c'est-à-dire indépendants de k . Les densités f_1 et f_2 sont alors approchées à chaque instant par une somme de masses de Dirac :

$$f_i(t, x, v) \simeq \sum_{k=1}^{N_i} \omega_i \delta(x - x_i^k(t)) \delta(v - v_i^k(t)).$$

Les équations (74) et (75) sont résolues en déplaçant les positions x_i^k le long des lignes caractéristiques, c'est-à-dire en résolvant pour $i = 1, 2$ et pour tout k

$$\frac{dx_i^k}{dt} = v_i^k, \quad \frac{dv_i^k}{dt} = 0.$$

Les équations (76), (77) et (78) sont ensuite résolues localement dans chaque maille d'espace, c'est-à-dire en représentant localement f_1 et f_2 par

$$f_i(t, v) \simeq \sum_{k=1}^{N_{ic}} \omega_i \delta(v - v_i^k(t)).$$

Pour résoudre l'équation (78), nous utilisons une méthode de Bird [Bi4] (méthode de Bird sans compteur de temps et avec collisions fictives). La résolution des équations (76) et (77) n'est elle pas classique, car les opérateurs R_1 et R_2 correspondent à un mécanisme de réflexion diffuse. De plus, en raison de la grande différence de densité entre la distribution en molécules et celle en poussières, les représentativités ω_1 et ω_2 ne peuvent pas être prises identiques. Nous utilisons donc une méthode de Nanbu [N] pour la simulation de la partie négative de ces opérateurs (c'est-à-dire les termes de perte R_1^- et R_2^- des opérateurs). La simulation de la partie positive (c'est-à-dire des termes de gain R_1^+ et R_2^+ des opérateurs) consiste à déterminer les nouvelles vitesses v_1^k , $1 \leq k \leq N_1$ (dans le cas de l'équation (76)) ou v_2^k , $1 \leq k \leq N_2$ (dans le cas de l'équation (77)). Nous avons pour cela élaboré une méthode de tirage des vitesses post-collisionnelles basée sur la modélisation de ces collisions établie au Chapitre 1.

Les méthodes de Bird et de Nanbu dites sans compteur de temps imposent de choisir un pas de temps inférieur au plus petit des temps moyen de collision ; dans les conditions physiques dans lesquelles on se place, cela revient à prendre

$$\Delta t \leq 1/\nu_{12},$$

où ν_{12} est la fréquence moyenne des collisions de type particules-molécules. De plus, dans le contexte inhomogène en espace, la résolution des équations (74) et (75) amène à introduire les conditions

$$\bar{v}_2 \Delta t \leq \Delta x,$$

et

$$\bar{v}_1 \Delta t \leq \Delta x,$$

où Δx est la taille caractéristique d'une maille, \bar{v}_1 et \bar{v}_2 la vitesse moyenne des particules et des molécules respectivement à l'intérieur de la maille c .

Par ailleurs, le nombre moyen de collisions entre particules de poussière et molécules $\overline{N_{coll}^{12}}(\tau)$ durant un temps τ , le nombre moyen de collisions entre molécules et particules de poussière $\overline{N_{coll}^{21}}(\tau)$ et le nombre moyen de collisions entre molécules $\overline{N_{coll}^{22}}(\tau)$ vérifient les estimations

$$\frac{\overline{N_{coll}^{12}}(\tau)}{\overline{N_{coll}^{21}}(\tau)} \sim \frac{N_{1c}}{N_{2c}} \frac{n_2^\circ}{n_1^\circ}$$

et

$$\frac{\overline{N_{coll}^{12}}(\tau)}{\overline{N_{coll}^{22}}(\tau)} \sim \frac{N_{1c}}{N_{2c}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{r_p}{\varrho} \right)^2.$$

En supposant $N_{1c} \sim N_{2c}$, on remarque que le nombre de collisions de type particules-molécules est, d'après les hypothèses effectuées sur la densité et le rayon des particules, largement plus grand que le nombre de collisions de type molécules-particules ou molécules-molécules. Autrement dit, la simulation de l'opérateur R_1 est beaucoup plus coûteuse que celle des deux autres ; elle se révèle de plus déraisonnable dans les conditions de rayon de particules et de densités caractéristiques d'ITER. Pour cette raison, on introduira dans la seconde partie de la thèse un modèle asymptotique permettant de s'affranchir du calcul de R_1 .

Nous présentons finalement le résultat de simulations numériques effectuées dans le cas d'un système spatialement homogène (afin de s'affranchir de l'influence des conditions aux limites), pour des rayons de particules de poussière moins grands que ceux considérés dans le contexte d'ITER (afin d'avoir des temps de calcul raisonnables). Nous présentons en particulier l'évolution temporelle des vitesses macroscopiques des espèces, définies pour $i = 1, 2$ par

$$\mathbf{u}_{f_i}(t) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} f_i(t, v) v dv}{\int_{\mathbb{R}^3} f_i(t, v) dv},$$

(qui nous permet de vérifier que la quantité de mouvement est bien conservée en moyenne), et celle des températures cinétiques des espèces, définies pour $i = 1, 2$ par

$$T_{f_i}(t) = \frac{m_i}{3k_B} \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^3} f_i(t, v) dv} \left[\int_{\mathbb{R}^3} (v - \mathbf{u}_{f_i}(t))^2 f_i(t, v) dv \right].$$

Dans le cas d'une section de sphères dures, on constate que ces températures convergent au bout d'un certain temps vers la température de surface des particules de poussière T_{surf} , ce qui correspond bien à ce que l'on pouvait attendre à partir de considérations physiques. De plus, dans le cas du modèle avec section pseudo-maxwellienne, il est possible d'établir des expressions analytiques formelles décrivant l'évolution des vitesses macroscopiques ainsi qu'un système d'EDO vérifié par les températures cinétiques. La comparaison entre ces expressions formelles et les résultats obtenus numériquement nous permet de vérifier la validité de la méthode numérique utilisée pour les équations (76) et (77).

Partie II. Étude d'un modèle asymptotique de type Vlasov/Boltzmann

Chapitre 4.

Nous considérons dans ce Chapitre le couplage

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_x f_1 + \frac{F_1}{m_1(r)} \cdot \nabla_{v_1} f_1 = R_1(f_1, f_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + v_2 \cdot \nabla_x f_2 + \frac{F_2}{m_2} \cdot \nabla_{v_2} f_2 = R_2(f_1, f_2) + Q(f_2, f_2), \\ x \in \mathbb{R}^3, v_1 \in \mathbb{R}^3, v_2 \in \mathbb{R}^3, r \in [r_{min}, r_{max}], t \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (79)$$

dans lequel F_1 et F_2 sont les forces s'exerçant sur les particules de poussière et les molécules de gaz respectivement, $Q(f_2, f_2)$ est l'opérateur (40), $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$ sont les opérateurs de collision entre molécules et particules de poussière, donnés par (41) et (42) ou par (55) et (56), et nous proposons d'introduire des modèles asymptotiques approchant celui-ci dans la limite où le rapport de masse entre les molécules et les particules de poussière tend vers zéro. Cela nous permet notamment de procéder ensuite à une étude du système gaz-poussières à différentes échelles de temps et d'espace.

La limite pour des rapports de masse faibles dans le contexte d'équations cinétiques a été étudiée dans [DL1, DL2, CD, DL3] dans le cas d'un mélange de deux gaz de différentes masses ou d'un plasma. Dans ce contexte, un adimensionnement, différent pour les particules légères et les particules lourdes, est opéré sur le terme de collision et le terme de transport. Un développement de Chapman-Enskog est ensuite effectué sur les densités des deux espèces, conduisant à un couplage entre une équation cinétique et une équation de Navier-Stokes incompressible ou un couple d'équations de Navier-Stokes compressible, suivant l'échelle de temps considérée. Cette étude est effectuée d'un point de vue formel dans le cas spatialement inhomogène dans [DL2], et rigoureusement dans le cas homogène en espace dans [DL1].

La première approche que nous développons ici présente des similarités avec celle introduite dans ces articles, en particulier au niveau de l'adimensionnement des grandeurs du système. Nous supposons comme dans ceux-ci que les deux espèces possèdent une température cinétique commune, notée T° . Cependant, contrairement au contexte dans lequel se placent les articles [DL1, DL2, CD, DL3], ni les densités des deux espèces ni les sections de collisions ne peuvent être supposées du même ordre de grandeur. Nous introduisons alors un autre paramètre que le rapport de masse entre les espèces, défini par

$$\alpha^\circ = \frac{n_1^\circ}{n_2^\circ},$$

où n_1° et n_2° sont les ordres de grandeur des densités spatiales en nombre de particules de poussière et molécules respectivement.

L'adimensionnement des vitesses est effectué de façon différente pour les deux espèces, à partir des vitesses thermiques moyennes V_1° et V_2° de celles-ci, en posant

$$\hat{v}_1 = \frac{v_1}{V_1^\circ}$$

la vitesse adimensionnée relative aux particules de poussières, et

$$\check{v}_2 = \frac{v_2}{V_2^\circ}$$

la vitesse adimensionnée relative aux molécules. Ces ordres de grandeur V_1° et V_2° sont reliés par la relation

$$V_1^\circ = \sqrt{\varepsilon_m} V_2^\circ,$$

où $\varepsilon_m = \varepsilon(r_{min})$ est le rapport de masse entre une molécule et une particule de rayon r . On introduit également les variables d'espace, de temps, et de rayon

$$\bar{x} = \frac{x}{L^\circ}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^\circ}, \quad \text{et} \quad \bar{r} = \frac{r}{r_{min}},$$

où t° est l'échelle de temps choisie, et L° celle d'espace. Les fonctions de densité sont adimensionnées différemment en posant

$$\hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) = \frac{f_1(t, x, v, r)}{f_1^\circ}, \quad \text{où} \quad f_1^\circ = \frac{n_1^\circ}{(V_1^\circ)^3 r_{min}},$$

et

$$\check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) = \frac{f_2(t, x, v_2)}{f_2^\circ}, \quad \text{où} \quad f_2^\circ = \frac{n_2^\circ}{(V_2^\circ)^3}.$$

On introduit par ailleurs une échelle de force, égale à $F^\circ = k_B T^\circ / L^\circ$, par laquelle on adimensionne les forces F_1 et F_2 . Nous supposons ici que F_1 et F_2 correspondent aux forces de pesanteur exercées sur les particules et les molécules, et on note respectivement \bar{P}_1 et \bar{P}_2 ces forces de pesanteur adimensionnées. Les équations adimensionnées s'écrivent alors sous la forme

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} + \frac{V_1^\circ t^\circ}{L^\circ} \hat{v}_1 \cdot \nabla_{\bar{x}} \hat{f}_1 + \frac{V_1^\circ t^\circ}{L^\circ} \bar{P}_1 \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 = t^\circ n_2^\circ (r_{min})^2 V_2^\circ \bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}), \quad (80)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} + \frac{V_2^\circ t^\circ}{L^\circ} \check{v}_2 \cdot \nabla_{\bar{x}} \check{f}_2 + \frac{V_2^\circ t^\circ}{L^\circ} \bar{P}_2 \cdot \nabla_{\check{v}_2} \check{f}_2 = & t^\circ n_1^\circ (r_{min})^2 V_2^\circ \bar{R}_2(\hat{f}_1, \check{f}_2) \\ & + 4\pi t^\circ n_2^\circ V_2^\circ \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2), \end{aligned} \quad (81)$$

où $\bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2)$, $\bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2)$ et $\bar{R}_2(\hat{f}_1, \check{f}_2)$ correspondent aux opérateurs de collision adimensionnés. L'expression des opérateurs \bar{R}_1 et \bar{R}_2 est explicitée dans le cas de collisions élastiques \bar{R}_1^e et \bar{R}_2^e , et pour les opérateurs correspondant aux collisions avec réflexion diffuse $\bar{R}_1^d(\hat{f}_1, \check{f}_2)$, $\bar{R}_2^d(\hat{f}_1, \check{f}_2)$ d'une part et $\bar{R}_1^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2)$, $\bar{R}_2^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2)$ d'autre part. Dans l'expression de ces opérateurs, les vitesses post-collisionnelles adimensionnées sont données par

$$\begin{cases} \hat{v}'_1 &= \hat{v}_1 + \frac{2\sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-3}}{1 + \varepsilon_m \bar{r}^{-3}} [\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)] \omega, \\ \check{v}'_2 &= \check{v}_2 - \frac{2}{1 + \varepsilon_m \bar{r}^{-3}} [\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)] \omega, \end{cases} \quad (82)$$

dans le cas élastique, et

$$\begin{cases} \hat{v}_1'' &= \frac{1}{1 + \varepsilon_m \bar{r}^{-3}} \left(\hat{v}_1 + \sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-3} \check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-3} \check{w} \right), \\ \check{v}_2'' &= \frac{1}{1 + \varepsilon_m \bar{r}^{-3}} \left(\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 + \varepsilon_m \bar{r}^{-3} \check{v}_2 + \check{w} \right), \end{cases} \quad (83)$$

dans le cas de collision par réflexion diffuse.

Le caractère rasant des collisions subies par les particules de poussières avec les molécules (qui s'exprime par le fait que $\hat{v}_1' - \hat{v}_1 = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_m})$ et $\hat{v}_1'' - \hat{v}_1 = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_m})$) nous permet ensuite d'effectuer un développement asymptotique formel de l'opérateur de collision $\bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2)$ à l'ordre 1 en $\sqrt{\varepsilon_m}$. Nous montrons que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^3)$, on a formellement

$$\int_{\mathbb{R}^3} \bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \varphi(\hat{v}_1) d\hat{v}_1 = \sqrt{\varepsilon_m} a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \varphi(\hat{v}_1) \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1 + o(\sqrt{\varepsilon_m}),$$

où $a(\check{f}_2)$ a pour expression

$$\bar{\Gamma}_a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) = \frac{\pi}{\bar{r}} \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) |\check{v}_2| \check{v}_2 d\check{v}_2$$

dans le cas de l'opérateur $\bar{R}_1^e(\hat{f}_1, \check{f}_2)$,

$$\bar{\Upsilon}_{a, sd}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) = \frac{\pi}{\bar{r}} \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \left[|\check{v}_2| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] \check{v}_2 d\check{v}_2 \quad (84)$$

dans le cas de l'opérateur $\bar{R}_1^d(\hat{f}_1, \check{f}_2)$, et

$$\bar{\Upsilon}_{a, m}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) = \frac{4\pi}{\bar{r}^3} \bar{C}_m(r) \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \check{v}_2 d\check{v}_2 \quad (85)$$

dans le cas de l'opérateur $\bar{R}_1^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2)$.

Ce développement asymptotique nous conduit alors à introduire un système asymptotique sous la forme d'un couplage de type Vlasov/ Boltzmann, donné par

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} + \frac{V_1^\circ t^\circ}{L^\circ} \hat{v}_1 \cdot \nabla_{\bar{x}} \hat{f}_1 + \frac{V_1^\circ t^\circ}{L^\circ} \bar{P}_1 \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 + t^\circ n_2^\circ (r_{min})^2 V_2^\circ \sqrt{\varepsilon_m} a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 = 0, \quad (86)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} + \frac{V_2^\circ t^\circ}{L^\circ} \check{v}_2 \cdot \nabla_{\bar{x}} \check{f}_2 + \frac{V_2^\circ t^\circ}{L^\circ} \bar{P}_2 \cdot \nabla_{\check{v}_2} \check{f}_2 &= t^\circ n_1^\circ (r_{min})^2 V_2^\circ \bar{R}_2(\hat{f}_1, \check{f}_2) \\ &+ 4\pi t^\circ n_2^\circ V_2^\circ \varrho^2 \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2). \end{aligned} \quad (87)$$

Une étude à différentes échelles des équations (86) et (87) met en évidence que l'échelle la plus adaptée pour l'étude (notamment numérique) du mélange gaz-poussières est l'échelle

relative aux molécules de gaz, c'est-à-dire lorsque t° est égal au temps moyen de collision entre molécules, et que L° correspond au libre parcours moyen entre molécules. En posant

$$c := \frac{\alpha^\circ}{4\pi} \left(\frac{\eta}{\varepsilon_m} \right)^{2/3} \sim 1, \quad (88)$$

les équations (86) et (87) s'écrivent :

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} + \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 \cdot \nabla_{\bar{x}} \hat{f}_1 + \sqrt{\varepsilon_m} \bar{P}_1 \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 + c \frac{\sqrt{\varepsilon_m}}{\alpha^\circ} a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 = 0, \quad (89)$$

et

$$\frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} + \check{v}_2 \cdot \nabla_{\bar{x}} \check{f}_2 + \bar{P}_2 \cdot \nabla_{\check{v}_2} \check{f}_2 = c \bar{R}_2^e(\hat{f}_1, \check{f}_2) + \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2). \quad (90)$$

De plus, en notant

$$\xi = \frac{\alpha^\circ}{\sqrt{\varepsilon_m}},$$

on peut passer formellement à la limite à la limite dans le système (4.75)–(4.76) lorsque $\varepsilon_m \rightarrow 0$ et que le rapport ξ reste fixé. Le système limite prend la forme suivante, dans le cas spatialement homogène, en l'absence de gravité :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} + \frac{c}{\xi} a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 = 0, \\ \frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} = c \bar{R}_{2,limite}(\hat{f}_1, \check{f}_2) + \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2), \end{cases} \quad (91)$$

où l'opérateur $\bar{R}_{2,limite}$ est obtenu en passant à la limite lorsque $\varepsilon_m \rightarrow 0$ dans les expressions de la vitesse post-collisionnelle \check{v}_2' donnée par (82) ou \check{v}_2'' donnée par (83). Nous justifierons rigoureusement ce passage à la limite (au sens faible) au Chapitre 5 dans le cas des opérateurs de collision élastique.

Cependant, une étude formelle de l'évolution des vitesses macroscopiques pour le système composé des équations (86) et (87) spatialement homogènes avec $a(\check{f}_2) = \tilde{\Upsilon}_{a,m}$ et $\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = 0$ montre que ce modèle n'a pas un comportement similaire en temps long à celui du modèle composé de deux équations de Boltzmann (79) homogènes en espace. Nous proposons alors un second adimensionnement, dans lequel les vitesses des molécules et des particules sont adimensionnées à partir du même ordre de grandeur V° . Il est ensuite équivalent d'opérer un développement asymptotique de l'opérateur $R_1(f_1, f_2)$ adimensionné sous cette hypothèse ou d'opérer le développement asymptotique directement sous sa forme dimensionnée. On montre alors que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^3)$, on a formellement

$$\int_{\mathbb{R}^3} R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) \varphi(v_1) dv_1 = \varepsilon_m \int_{\mathbb{R}^3} b(f_2)(t, x, v_1, r) \cdot \nabla \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1, r) dv_1 + o(\varepsilon_m),$$

où $\varepsilon_m b(f_2)$ est donné par

$$\Gamma_b(f_2)(t, x, v_1, r) = \pi \varepsilon_m \frac{r_{min}^3}{r} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) |v_2 - v_1| (v_2 - v_1) dv_2$$

dans le cas de l'opérateur $R_1^e(f_1, f_2)$,

$$\Upsilon_{b, sd}(f_2)(t, x, v_1, r) = \pi \varepsilon_m \frac{(r_{min})^2}{r} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) \left[|v_2 - v_1| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] (v_2 - v_1) dv_2$$

dans le cas de l'opérateur $R_1^d(f_1, f_2)$, et

$$\Upsilon_{b, m}(f_2)(t, x, v_1, r) = 4\pi \varepsilon_m C_m(r) \left(\frac{r_{min}}{r} \right)^3 n_{f_2}(t, x) (\mathbf{u}_{f_2}(t, x) - v_1)$$

dans le cas de l'opérateur $R_1^{dm}(f_1, f_2)$. Remarquons qu'à la différence du terme $a(f_2)$, $b(f_2)$ dépend de la variable v_1 .

On obtient finalement un second système asymptotique sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_x f_1 + \frac{F_1}{m_1(r)} \cdot \nabla_v f_1 + \varepsilon_m \operatorname{div}_{v_1} (b(f_2) f_1) &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + v_2 \cdot \nabla_x f_2 + \frac{F_2}{m_2} \cdot \nabla_{v_2} f_2 &= R_2(f_1, f_2) + Q(f_2, f_2). \end{aligned}$$

Remarquons que le terme $b(f_2)$ permet d'introduire une force de traînée

$$\mathbf{F}_d(t, x, v_1, r) = m_1(r) \varepsilon_m b(f_2),$$

qui, contrairement aux modèles de forces de traînée utilisés dans [Cr, BZ] par exemple, ne contient pas de coefficient empirique.

Chapitre 5.

Nous nous intéressons dans ce Chapitre à la convergence des solutions du couplage de type Boltzmann/Boltzmann homogène en espace, muni des opérateurs de collision élastique R_1^e et R_2^e , vers une solution du premier modèle asymptotique lorsque le rapport de masse ε_m entre une poussière de rayon r_{min} et une molécule tend vers zéro.

Nous considérons pour cela le premier adimensionnement introduit au Chapitre 4, dans lequel les vitesses des espèces sont adimensionnées différemment à partir d'ordres de grandeurs V_1° et V_2° vérifiant $V_1^\circ = \sqrt{\varepsilon_m} V_2^\circ$. Les densités f_1 et f_2 sont adimensionnées en posant

$$\hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) = \frac{(V_1^\circ)^3 r_{min}}{n_1^\circ} f_1(t, x, v, r),$$

et

$$\check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) = \frac{(V_2^\circ)^3}{n_2^\circ} f_2(t, x, v_2),$$

et on introduit comme dans les Chapitres précédents le rapport $\alpha^\circ = n_1^\circ/n_2^\circ$. Les densités adimensionnées \hat{f}_1 et \check{f}_2 vérifient, dans le cas homogène en espace, le système

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\eta}{\varepsilon_m} \right)^{2/3} \bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2), \quad (92)$$

$$\frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} = \frac{\alpha^\circ}{4\pi} \left(\frac{\eta}{\varepsilon_m} \right)^{2/3} \bar{R}_2(\hat{f}_1, \check{f}_2) + \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2), \quad (93)$$

où \bar{R}_1 , \bar{R}_2 et \bar{Q} sont les opérateurs de collision adimensionnés, et η une constante dépendant de la masse volumique des particules de poussière. Les opérateurs \bar{R}_1 , \bar{R}_2 correspondent aux opérateurs élastiques \bar{R}_1^e , \bar{R}_2^e , et on se place dans les conditions physiques (déjà invoquées au Chapitre 4) telles que

$$c := \frac{\alpha^\circ}{4\pi} \left(\frac{\eta}{\varepsilon_m} \right)^{2/3} \sim 1. \quad (94)$$

On suppose de plus que

$$\alpha^\circ \sim \sqrt{\varepsilon_m}.$$

On pose alors

$$p := \frac{1}{\alpha^\circ},$$

et $\xi > 0$ tel que $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m}} = \xi p$. En écrivant ensuite $f_1(t, v, r)$ au lieu de $\hat{f}_1(\bar{t}, \hat{v}_1, \bar{r})$, $f_2(t, v)$ au lieu de $\check{f}_2(\bar{t}, \check{v}_2)$, Q^a au lieu de \bar{Q} , $R_1^{a,p}$ au lieu de \bar{R}_1^e , et $R_2^{a,p}$ au lieu de \bar{R}_2^e , les équations (92) et (93) se mettent alors sous la forme :

$$\frac{\partial f_{1,p}}{\partial t} = p c R_1^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p}), \quad (95)$$

$$\frac{\partial f_{2,p}}{\partial t} = c R_2^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p}) + Q^a(f_{2,p}, f_{2,p}). \quad (96)$$

Les opérateurs Q^a , $R_1^{a,p}$, $R_2^{a,p}$ sont définis par

$$\begin{aligned} & Q^a(f_2, f_2)(t, v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_2(t, v') f_2(t, v'_*) - f_2(t, v) f_2(t, v_*)] C_{eff}^a |v - v_*|^\alpha d\sigma dv_*, \end{aligned}$$

où C_{eff}^a est une constante strictement positive et sans dimension, et v', v'_* vérifient (58),

$$\begin{aligned} R_1^{a,p}(f_1, f_2)(t, v_1, r) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_1(t, v'_{1,p}, r) f_2(t, v'_{2,p}) - f_1(t, v_1, r) f_2(t, v_2)] \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{p}c} + r \right)^2 \left| \left(v_2 - \frac{v_1}{p} \right) \cdot \omega \right| d\omega dv_2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_2^{a,p}(f_1, f_2)(t, v_2) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} [f_1(t, v'_{1,p}, r) f_2(t, v'_{2,p}) - f_1(t, v_1, r) f_2(t, v_2)] \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{p}c} + r \right)^2 \left| \left(v_2 - \frac{v_1}{p} \right) \cdot \omega \right| dr d\omega dv_1, \end{aligned}$$

où c est une constante adimensionnée, $r_0 = \frac{r_{max}}{r_{min}}$, et

$$\begin{cases} v'_{1,p} &= v_1 + \frac{2pr^{-3}}{p^2 + r^{-3}} \left[\omega \cdot \left(v_2 - \frac{v_1}{p} \right) \right] \omega, \\ v'_{2,p} &= v_2 - \frac{2p^2}{p^2 + r^{-3}} \left[\omega \cdot \left(v_2 - \frac{v_1}{p} \right) \right] \omega. \end{cases} \quad (97)$$

Nous montrons dans ce Chapitre que les solutions de (95)–(96) données par la Proposition 0.1 convergent lorsque $p \rightarrow \infty$ vers les solutions du système Vlasov/Boltzmann suivant :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\pi c}{r\xi} K(f_2) \cdot \nabla_v f_1 = 0, \quad (98)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{c}{2} m(f_{1,in}) L(f_2) + Q^a(f_2, f_2), \quad (99)$$

où

$$m(f_{1,in}) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,in}(v_1, r) r^2 dr dv_1,$$

$$L(f_2)(t, v) = \int_{\mathbb{S}^2} [f_2(t, v - 2(\omega \cdot v)\omega) - f_2(t, v)] |v \cdot \omega| d\omega,$$

et

$$K(f_2)(t, r) = \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v_2) |v_2| v_2 dv_2. \quad (100)$$

Plus précisément, nous prouvons le théorème suivant :

Théorème 0.2 Soient $\alpha \in]0, 1[$, $r_0 > 1$, $C_{eff}^a > 0$ (apparaissant dans la définition de $R_1^{e,a,p}, R_2^{e,a,p}, Q$), et soient $f_{1,in} := f_{1,in}(r, v) > 0$, $f_{2,in} := f_{2,in}(v) > 0$ des conditions initiales telles que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,in}(v, r) (1 + |v|^4 + |\ln f_{1,in}(v, r)|) dr dv &< +\infty, \\ \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) (1 + |v|^4 + |\ln f_{2,in}(v)|) dv &< +\infty. \end{aligned} \quad (101)$$

En appelant $(f_{1,p}, f_{2,p})$ une famille (indexée par p) de solutions faibles des équations (95) – (96) données par la Proposition 0.1 (avec $f_{1,p}(0, \cdot, \cdot) = f_{1,in}$, $f_{2,p}(0, \cdot) = f_{2,in}$), on peut extraire de cette famille une sous-suite (toujours appelé $(f_{1,p}, f_{2,p})$) qui converge pour tout $T > 0$ dans $L^\infty([0, T]; M^1(\mathbb{R}^3 \times [1, r_0]) \times L^1(\mathbb{R}^3))$ faible* vers une solution faible $(f_1, f_2) \in L^\infty([0, T]; M^1(\mathbb{R}^3 \times [1, r_0]) \times L^1(\mathbb{R}^3))$ des équations (98) – (99). Par solution faible, nous entendons ici que pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times [1, r_0])$, on a

$$\begin{aligned} - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_1(t, v, r) \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, v, r) dr dv dt &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,in}(v, r) \psi(0, v, r) dr dv \\ &+ \frac{\pi c}{\xi r} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} K(f_2)(t, r) \cdot \nabla_v \psi(t, v, r) f_1(t, v_1, r) dr dv dt, \end{aligned} \quad (102)$$

et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$, on a

$$\begin{aligned} - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, v) dv dt &= \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) \varphi(0, v) dv \\ &+ c m(f_{1,in}) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} L(f_2)(t, v) \varphi(t, v) dv dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} Q^a(f_2, f_2)(t, v) \varphi(t, v) dv dt. \end{aligned} \quad (103)$$

Notre preuve est basée sur une nouvelle variante de l'inégalité de Povzner, spécialement adaptée au cas de particules de masses très différentes. Celle-ci nous permet d'obtenir une estimation uniforme en p du moment d'ordre 3 de $f_{2,p}$. Plus précisément, nous montrons que sous les hypothèses du Théorème 0.2 et pour tout $T > 0$, on a

$$\sup_{t \in [0, T], p \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \left(\frac{1}{p} f_{1,p}(t, v, r) + f_{2,p}(t, v) \right) (1 + |v|^3) dr dv < +\infty.$$

Malheureusement, l'estimation d'entropie n'étant uniforme par rapport à p que pour $f_{2,p}$, et non pour $f_{1,p}$, le passage à la limite lorsque $p \rightarrow \infty$ n'est effectué qu'au sens des mesures pour $f_{1,p}$. Rappelons que les solutions au sens des mesures de l'équation de Boltzmann ont été introduites dans le contexte de solutions stationnaires, comme dans [Ce2] par exemple. Cependant, nous n'avons pas besoin ici d'introduire cette notion si les données initiales sont suffisamment régulières. En effet, même si la suite $(f_{1,p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ ne converge que dans un tel espace, l'équation obtenue à la limite propage la régularité de la donnée initiale.

Ce résultat nous permet de valider rigoureusement dans un cadre spatialement homogène le développement asymptotique formel effectué au Chapitre précédent dans le cas de l'opérateur de collision R_1^c avec section de sphère dure.

Chapitre 6.

Nous présentons dans ce Chapitre la mise en oeuvre numérique du couplage Vlasov/Boltzmann introduit au Chapitre 4 et son application à la simulation d'un accident de perte de vide dans des conditions physiques (rayon de particules et densité) représentatives du réacteur ITER.

Dans la première partie de ce Chapitre, nous étudions numériquement le couplage Vlasov/Boltzmann

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_x f_1 + \operatorname{div}_v (f_1 \Upsilon(f_2)) = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + v_2 \cdot \nabla_x f_2 = R_2(f_1, f_2) + Q_{sd}(f_2, f_2), \end{cases} \quad (104)$$

dans lequel Q_{sd} est un opérateur de collision de Boltzmann muni d'une section de sphères dures (donné par (72)), $R_2(f_1, f_2)$ l'opérateur de collision entre molécules et particules de poussière du modèle dit de réflexion diffuse (donné par (73)), noté $R_2^d(f_1, f_2)$ dans le cas d'une section de sphères dures ou $R_2^{dm}(f_1, f_2)$ dans le cas d'une section pseudo-maxwellienne. Le terme $\Upsilon(f_2)$ décrit l'influence des molécules sur les particules de poussière. Celui-ci provient du développement asymptotique formel de l'opérateur de collision entre particules de poussière et molécules du modèle de réflexion diffuse $R_1^d(f_1, f_2)$ (dans le cas d'une section de sphères dures) ou $R_1^{dm}(f_1, f_2)$ (dans le cas d'une section pseudo-maxwellienne) opéré au Chapitre 4, pour lequel nous avons considéré deux adimensionnements. Nous introduisons alors, pour chacune des sections considérées, deux modèles pour $\Upsilon(f_2)$, correspondant aux expressions re-dimensionnées des équivalents asymptotiques de l'opérateur $R_1^d(f_1, f_2)$ ou $R_1^{dm}(f_1, f_2)$ adimensionné. Nous supposons dans ce Chapitre que les particules possèdent toutes le même rayon r_p , et on note ε le rapport de masse entre

une molécule et une particule de poussière. Dans ce contexte, les différentes expressions de $\Upsilon(f_2)$ sont données dans le premier modèle par

$$\Upsilon_{a,sd}(f_2)(t, x) = \pi \varepsilon r_p^2 \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) \left[|v_2| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] v_2 dv_2,$$

pour la section de sphères dures et

$$\Upsilon_{a,m}(f_2)(t, x) = 4\pi \varepsilon C_m \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) v_2 dv_2,$$

pour la section pseudo-maxwellienne, et dans le second modèle par

$$\Upsilon_{b,sd}(f_2)(t, x, v_1) = \pi \varepsilon r_p^2 \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) \left[|v_2 - v_1| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] (v_2 - v_1) dv_2,$$

pour la section de sphères dures et

$$\Upsilon_{b,m}(f_2)(t, x, v_1) = 4\pi \varepsilon C_m n_{f_2}(t, x) (\mathbf{u}_{f_2}(t, x) - v_1),$$

pour la section pseudo-maxwellienne.

Le système (104) est résolu en couplant les méthodes de Bird et de Nanbu avec une méthode de type PIC pour l'équation de Vlasov. Les méthodes PIC sont couramment utilisées depuis les années 1980 pour la résolution des équations de Vlasov-Maxwell ou Vlasov-Poisson [Br, So]. Dans ces équations, les champs électriques et magnétiques dépendent de la densité en particules, ce qui rend leur résolution plus compliquée qu'avec une méthode particulière classique.

Dans le cas du système (104), on approche à chaque pas de temps les densités f_1 et f_2 par des combinaisons linéaires de masses de Dirac :

$$f_i(t, x, v) \simeq \sum_{k=1}^{N_i} \omega_i \delta(x - x_i^k(t)) \delta(v - v_i^k(t)),$$

et on résout l'équation sur la densité f_2 comme au Chapitre 3 par splitting entre la partie transport et les parties collisions (résolues grâce aux méthodes de Bird et de Nanbu). On utilise ensuite dans chaque maille une approximation locale de la densité f_2 (obtenue par interpolation de celle-ci avec la fonction indicatrice de la maille) pour calculer le terme d'accélération appliqué aux particules de poussière. Dans le cas du premier modèle, le terme $\Upsilon_{a,sd}(f_2)(t^n, x_1^k)$ est approché par

$$\Upsilon_{a,sd}^{c,n} = \pi \varepsilon r_p^2 \frac{\omega_2}{V_c} \sum_{j=0}^{N_{2c}} \left[|V_2^{n,j}| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] V_2^{n,j},$$

où $V_2^{n,j}$ représente l'approximation de $v_2^j(t)$ au temps t^n , la sommation étant effectuée sur les molécules numériques situées dans la maille c , et $\Upsilon_{a,m}(f_2)(t^n, x_1^k)$ est approché par

$$\Upsilon_{a,m}^{c,n} = 4\pi \varepsilon C_m \frac{\omega_2}{V_c} \sum_{j=0}^{N_{2c}} V_2^{n,j}.$$

Dans le cas du second modèle, le terme $\Upsilon_{b,sd}(f_2)(t^n, x_1^k, v_1^k)$ est approché par

$$\Upsilon_{b,sd}^{c,n}(V_1^{k,n}) = \pi \varepsilon r_p^2 \frac{\omega_2}{V_c} \sum_{j=0}^{N_{2c}} (V_2^{n,j} - V_1^{k,n}) \left[|V_2^{n,j} - V_1^{k,n}| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right],$$

et le terme $\Upsilon_{b,m}(f_2)(t^n, x_1^k, v_1^k)$ est approché par

$$\Upsilon_{b,m}^{c,n}(V_1^{k,n}) = 4\pi \varepsilon C_m \frac{\omega_2}{V_c} \left(\sum_{j=0}^{N_{2c}} V_2^{n,j} - N_{2c} V_1^{k,n} \right). \quad (105)$$

La figure 3 présente le schéma général de résolution du couplage (104).

Numériquement, le système Vlasov/Boltzmann permet de s'affranchir de la simulation de l'opérateur $R_1(f_1, f_2)$, qui, comme on l'a vu au Chapitre 3, est largement plus coûteuse que celle des autres opérateurs. On remplace donc dans chaque maille c , sur un temps de simulation τ , un nombre moyen de collision $N_{12}^{coll}(\tau)$ par $\tau/\Delta t$ calculs (où Δt est le pas de temps) dont la complexité est en $\mathcal{O}(N_1^c)$ dans le cas de $\Upsilon_{a,sd}$, $\Upsilon_{a,m}$ et $\Upsilon_{b,m}$, et en $\mathcal{O}(N_1^c N_2^c)$ dans le cas de $\Upsilon_{b,sd}$. De plus, le temps caractéristique d'évolution des vitesses des particules de poussière étant supérieur à celui des molécules, nous introduisons un paramètre $n_{\Delta t}$ tel que nous ne modifions la vitesse des particules de poussière numériques que tout les $n_{\Delta t}$ pas de temps, tandis que les opérateurs Q_{sd} et $R_2(f_1, f_2)$ sont eux résolus à chaque pas de temps. On n'effectue alors plus que

$$\frac{\tau}{n_{\Delta t} \Delta t}$$

calculs, ce qui permet de réduire significativement le temps de résolution du système Vlasov/Boltzmann. Nous constatons au travers des essais numériques dans le contexte homogène en espace présentés dans la section 6.2.3, et des essais numériques dans le contexte inhomogène en espace présentés dans la partie 6.3, que celui-ci est beaucoup plus faible que celui du système Boltzmann/Boltzmann. Ce temps ne dépend quasiment plus du rayon des particules de poussière (alors que le temps de calcul devient exorbitant lorsque $r_p \geq 10^{-6}$ m dans le cas du système Boltzmann/Boltzmann).

Nous présentons ensuite des simulations numériques dans le contexte homogène en espace. Nous comparons les différents modèles à travers l'évolution des vitesses macroscopiques : d'une part le modèle Boltzmann/Boltzmann (présenté au Chapitre 3) avec le modèle Vlasov/Boltzmann pour $\Upsilon = \Upsilon_{b,sd}$, et d'autre part le modèle Vlasov/Boltzmann pour $\Upsilon = \Upsilon_{b,sd}$ avec le modèle Vlasov/Boltzmann pour $\Upsilon = \Upsilon_{a,sd}$. Nous mettons alors en évidence que l'évolution des vitesses est similaire entre les modèles Boltzmann/Boltzmann et Vlasov/Boltzmann pour $\Upsilon = \Upsilon_{b,sd}$, tandis que celle du modèle Vlasov/Boltzmann pour $\Upsilon = \Upsilon_{a,sd}$ diffère des deux précédentes après un certain temps. Par ailleurs, nous validons les méthodes numériques mises en œuvre à l'aide du modèle à section pseudo-maxwellienne.

Dans la seconde partie de ce Chapitre, nous présentons des simulations avec visualisation en trois dimensions du transport de particules de poussière dans le contexte d'un accident de perte de vide. Nous considérons pour cela une boîte (de géométrie cubique ou en cylindre torique) au fond de laquelle reposent des particules de poussière, et dont l'une des parois présente un trou émissif de molécules. On considère deux types de conditions aux limites. Pour la première condition aux limites, l'un des côtés de la boîte est muni

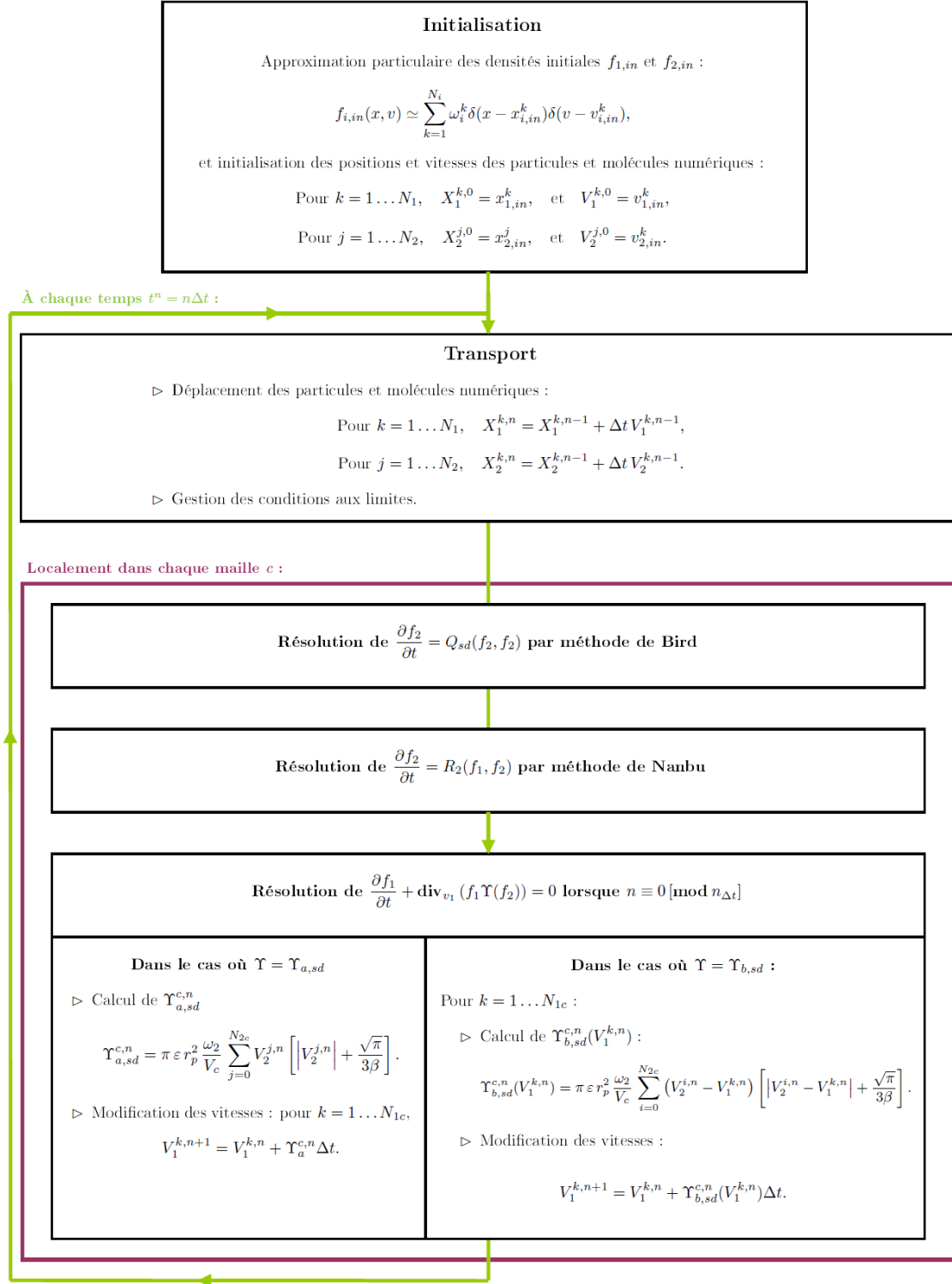


FIG. 3 – Schéma de résolution du couplage Vlasov/Boltzmann.

d'une condition d'absorption (ce qui permet aux molécules de gaz de "s'échapper", et de garder ainsi une densité en molécules relativement faible à l'intérieur de la boîte). Pour la seconde, tous les côtés sont munis d'une condition de réflexion diffuse, engendrant ainsi une mise en pression à l'intérieur de la boîte. Nous choisissons de plus des paramètres physiques proches de ceux d'ITER. Cependant, la taille des géométries utilisées reste très modeste (de l'ordre de 10^{-1} m).

Enfin, dans une troisième partie, nous proposons une modélisation du décollement de particules de poussière adhérentes à la paroi horizontale constituant le fond d'une boîte. Nous supposons pour cela, comme dans les travaux de Breitung, Travis et Xu [XT], qu'une particule de poussière immobile sur une paroi est soumise, en plus de son poids \mathbf{P} et de la force de trainée

$$\mathbf{F}_d(t, x) = m_2 \pi r_p^2 \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) \left[|v_2| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] v_2 dv_2$$

exercée par le gaz, à une force adhésive exercée par la paroi

$$\mathbf{F}_{adhesive} = F_{adhesive} \mathbf{j},$$

où \mathbf{j} est le vecteur normal à la paroi. Décomposons la force de trainée exercée sur la particule sous la forme suivante

$$\mathbf{F}_d = F_{dx} \mathbf{i} + F_{dy} \mathbf{j},$$

avec la convention $F_{dx} \geq 0$. Nous établissons alors le schéma de mobilisation suivant : la particule de poussière est mobilisée si et seulement si

$$F_{dx} \geq -f_s (F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g),$$

où f_s est le coefficient de friction. Dans le cas où elle est mobilisée :

- ▷ si $F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g \leq 0$, alors la particule glisse et la résultante des forces exercées sur la poussière est

$$\mathcal{F} = (F_{dx} + f_s (F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g)) \mathbf{i};$$

- ▷ si $F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g > 0$, alors la particule décolle et la résultante des forces exercées sur la poussière est

$$\mathcal{F} = \mathbf{F}_d + \mathbf{P}.$$

Notre intention est d'intégrer dans le futur ce modèle au code que nous avons développé et de confronter les études de mobilisation à celles présentées dans [XT] pour le code GLASFLOW (code Lagrangien/Eulérien).

Publications

Le travail présenté dans cette thèse a donné lieu aux publications suivantes :

- ▷ **Kinetic modelling and numerical simulations using particle methods for the transport of dust in a rarefied gas** [Ch]. Proceedings du 26th symposium "Rarefied gas dynamics" (RGD), publié dans la revue *American Institute of Physics* (2008). Cet acte de congrès est constitué d'une partie des résultats numériques présentés dans les Chapitres 3 et 6.
- ▷ **Small Mass Ratio Limit of Boltzmann Equations in the Context of the Study of Evolution of Dust Particles in a Rarefied Atmosphere** [ChDe]. Cet article, écrit en collaboration avec Laurent Desvillettes, a été accepté pour publication dans la revue *Journal of Statistical Physics* (2009). Il présente le Théorème démontré au Chapitre 5.

Première partie

Étude d'un modèle de type
Boltzmann/Boltzmann

Chapitre 1

Établissement d'un modèle cinétique de type Boltzmann/Boltzmann

Sommaire

1.1	Hypothèses et présentation du modèle	48
1.1.1	Hypothèses	48
1.1.2	Estimation des fréquences de collision	49
1.1.3	Écriture du modèle mathématique	52
1.2	Modèle de collision élastique	53
1.2.1	Présentation de $R_1^e(f_1, f_2)$ et $R_2^e(f_1, f_2)$	53
1.2.2	Propriétés des opérateurs $R_1^e(f_1, f_2)$ et $R_2^e(f_1, f_2)$	54
1.3	Modèle de collision par réflexion diffuse	55
1.3.1	Hypothèses de modélisation	55
1.3.2	Etablissement des opérateurs de collision	56
1.3.3	Autre formulation des opérateurs de collision	61
1.3.4	Modèle “pseudo-maxwellien”	67
1.3.5	Améliorations possibles du modèle	68

1.1 Hypothèses et présentation du modèle

Nous proposons dans ce Chapitre un premier modèle cinétique décrivant le transport de particules macroscopiques de poussière dans un gaz. Dans ce modèle, chacune des deux phases de gaz et de poussières est décrite comme dans la théorie cinétique des gaz par une fonction de densité, notée $f_1 := f_1(t, x, v, r)$ pour la phase de particules de poussière et $f_2 := f_2(t, x, v)$ pour le gaz, où $t \in \mathbb{R}^+$ est le temps, $x \in \Omega$ la variable d'espace (Ω étant un domaine borné de l'espace \mathbb{R}^3), $v \in \mathbb{R}^+$ la vitesse et r le rayon des particules de poussière. Le point central de notre modélisation consiste à décrire les collisions entre les différentes espèces au travers d'opérateurs cinétiques de type Boltzmann.

1.1.1 Hypothèses

Commençons par présenter quelques hypothèses de modélisation. Pour simplifier, nous supposons le gaz composé d'une seule espèce, et les particules de poussière sphériques, de divers rayons compris dans un intervalle borné $[r_{min}, r_{max}]$, avec $r_{min} < r_{max}$. De plus, dans le contexte qui nous intéresse, nous pouvons faire les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1. La densité en nombre de particules de poussière est très faible devant celle en nombre de molécules. Soit n_1° l'ordre de grandeur de la densité en nombre de particules

$$n_{f_1}(0, x) := \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(0, x, v, r) dr dv,$$

et n_2° celui de la densité en nombre de molécules

$$n_{f_2}(0, x) := \int_{\mathbb{R}^3} f_2(0, x, v) dv.$$

Dans le contexte considéré, nous supposons généralement que $n_1^\circ \approx 10^{14} \text{ m}^{-3}$ et $n_2^\circ \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}$. On peut donc faire l'hypothèse suivante :

$$n_1^\circ \ll n_2^\circ. \quad (1.1)$$

Nous noterons par la suite

$$\alpha^\circ = \frac{n_1^\circ}{n_2^\circ}. \quad (1.2)$$

Hypothèse 2. Les particules de poussière de rayon $r \in [r_{min}, r_{max}]$ sont macroscopiques comparées aux molécules de gaz de rayon ϱ , ce que l'on peut traduire par

$$\varrho \ll r_{min}. \quad (1.3)$$

En effet l'ordre de grandeur du diamètre des particules de poussière est dans le contexte d'ITER compris entre 10^{-8} et 10^{-5} m, tandis que celui des molécules est de l'ordre de 10^{-10} m ($4 \cdot 10^{-10}$ m pour des molécules d'azote par exemple). En notant $m_1(r)$ la masse d'une particule de rayon r et m_2 la masse d'une molécule, on a de plus :

$$\forall r \in [r_{min}, r_{max}], \quad m_2 \ll m_1(r). \quad (1.4)$$

On notera par la suite

$$\varepsilon(r) = \frac{m_2}{m_1(r)} \quad (1.5)$$

le rapport de masse entre une molécule et une particule de poussière de rayon r , et

$$\varepsilon_m = \varepsilon(r_{min}) \quad (1.6)$$

le rapport de masse associé aux particules de poussière de plus petit rayon. On a alors

$$\forall r \in [r_{min}, r_{max}], \quad \varepsilon(r) = \varepsilon_m \left(\frac{r_{min}}{r} \right)^3, \quad (1.7)$$

et, en particulier, $\varepsilon(r) \leq \varepsilon_m$ pour tout $r \geq r_{min}$: l'hypothèse (1.4) d'un rapport de masse très faible entre les particules de poussière et les molécules se traduit donc par :

$$\varepsilon_m \ll 1. \quad (1.8)$$

Par ailleurs, en introduisant la masse volumique ρ de l'élément chimique constituant les particules de poussière, et η la constante (sans dimension) égale à

$$\eta = \frac{3m_2}{4\pi\rho\varepsilon_m^3}, \quad (1.9)$$

l'hypothèse (1.3) se traduit par la relation

$$\left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{1/3} \ll 1, \quad (1.10)$$

puisque

$$r_{min} = \left(\frac{3m_2}{4\pi\rho\varepsilon_m} \right)^{1/3} = \left(\frac{\eta}{\varepsilon_m} \right)^{1/3} \varrho. \quad (1.11)$$

Hypothèse 3. Les températures cinétiques des deux espèces, définies par

$$T_{f_1}(t, x, r) = \frac{m_1(r)}{3k_B n_{f_1}(t, x, r)} \left[\int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, x, v, r) (v - \mathbf{u}_{f_1}(t, x, r))^2 dv \right],$$

et

$$T_{f_2}(t, x) = \frac{m_2}{3k_B n_{f_2}(t, x)} \left[\int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v) (v - \mathbf{u}_{f_2}(t, x))^2 dv \right],$$

sont du même ordre de grandeur. On note T° l'ordre de grandeur de ces températures.

1.1.2 Estimation des fréquences de collision

Nous introduisons ici les fréquences de collision. Nous distinguons pour cela différents types de collisions : les collisions entre molécules de gaz, les collisions entre particules de poussière, les collisions entre molécules et particules (du point de vue des molécules), et enfin les collisions entre particules et molécules (du point de vue des particules de poussière). Notons la distinction entre ces deux derniers types de collision : celle-ci est due à

la différence de densité en nombre entre les deux espèces (hypothèse (1.1)). Nous montrons en particulier que sous les hypothèses présentées dans la section (1.1.1), la fréquence de collision entre particules de poussière est négligeable comparée aux autres fréquences de collision. Ces estimations nous permettent alors de ne pas prendre en compte les collisions entre particules de poussière dans notre modèle.

Nous estimons pour cela les vitesses moyennes et vitesses relatives moyennes à partir de la vitesse moyenne d'un gaz à l'équilibre (*cf.* Annexe A). Soit

$$\langle v_2 \rangle := \left(\frac{8k_B T^\circ}{\pi m_2} \right)^{1/2} \quad (1.12)$$

l'ordre de grandeur de la vitesse moyenne des molécules,

$$\langle v_{2,2}^{rel} \rangle := \sqrt{2} \langle v_2 \rangle \quad (1.13)$$

l'ordre de grandeur de la vitesse relative moyenne entre molécules,

$$\langle v_{1,2}^{rel}(r) \rangle = \left[\frac{8k_B T^\circ}{\pi} \left(\frac{1}{m_1(r_i)} + \frac{1}{m_2} \right) \right]^{1/2} \quad (1.14)$$

l'ordre de grandeur de la vitesse relative moyenne entre molécules et particules de poussière de rayon r , et

$$\langle v_{1,1}(r_i, r_j) \rangle := \left[\frac{8k_B T^\circ}{\pi} \left(\frac{1}{m_1(r_i)} + \frac{1}{m_1(r_j)} \right) \right]^{1/2} \quad (1.15)$$

l'ordre de grandeur de la vitesse relative moyenne entre particules de poussière de rayon r_i et r_j . Par ailleurs, on définit (*cf.* Annexe A)

$$\Sigma_{2,2}^{sd} = 4\pi \varrho^2 \quad (1.16)$$

la section totale de collision de sphères dures entre molécules,

$$\Sigma_{1,2}^{sd}(r) = \pi(r + \varrho)^2 \quad (1.17)$$

la section de collision totale entre particules de poussière de rayon r et molécules, et

$$\Sigma_{1,1}^{sd}(r_i, r_j) = \pi(r_i + r_j)^2 \quad (1.18)$$

la section de collision de sphères dures entre particules de rayons r_i et r_j .

La fréquence de collision entre molécules est donnée par

$$\nu_{22} = n_2^\circ \Sigma_{2,2}^{sd} \sqrt{2} \langle v_2 \rangle. \quad (1.19)$$

Pour les collisions entre particules de poussière et molécules, il nous faut distinguer la fréquence de collision ν_{12} , qui correspond à la fréquence à laquelle une particule de poussière située dans un fond de molécules subit une collision, de la fréquence de collision ν_{21} , correspondant à l'inverse de la fréquence à laquelle une molécule située dans un fond de particules de poussière subit une collision. On peut alors définir (*cf.* [Bi4] p. 16) ces quantités par

$$\nu_{12} = n_2^\circ \overline{\Sigma_{1,2}^{sd} v_{1,2}^{rel}}, \quad (1.20)$$

où $\overline{\Sigma_{12}^{sd} v_{12}^{rel}}$ est la moyenne sur tous les rayons de particules de $\Sigma_{12}^{sd}(r) < v_{12}(r) >$. De façon similaire, on définit ν_{21} par

$$\nu_{21} = n_1^\circ \overline{\Sigma_{1,2}^{sd} v_{1,2}^{rel}}. \quad (1.21)$$

On définit également la fréquence de collision entre particules de poussière par

$$\nu_{11} = n_1^\circ \overline{\Sigma_{1,1}^{sd} v_{1,1}^{rel}}, \quad (1.22)$$

où $\overline{\Sigma_{1,1}^{sd} v_{1,1}^{rel}}$ est la moyenne sur tous les rayons de particules de $\Sigma_{1,1}^{sd}(r_i, r_j) < v_{1,1}(r_i, r_j) >$. De plus, sous les hypothèses (1.3) et (1.4), on a

$$< v_{1,2}(r) > \approx < v_2 >$$

et

$$\Sigma_{1,2}^{sd}(r) \approx \pi r^2.$$

En supposant que la distribution des rayon uniforme sur l'intervalle $[r_{min}, r_{max}]$, on peut alors estimer $\overline{\Sigma_{1,2}^{sd} v_{1,2}^{rel}}$ par

$$\overline{\Sigma_{1,2}^{sd} v_{1,2}^{rel}} \approx \frac{\pi}{3} < v_2 > (r_{max}^2 + r_{min}^2 + r_{max} r_{min}). \quad (1.23)$$

Par ailleurs, on peut montrer grâce à une étude de la fonction $(x, y) \mapsto (x+y)^2 \sqrt{x^{-3} + y^{-3}}$, qu'avec $r_{min} = 5 \cdot 10^{-9}$ m et $r_{max} = 5 \cdot 10^{-6}$ m, on a, pour tout $(r_i, r_j) \in [r_{min}, r_{max}] \times [r_{min}, r_{max}]$

$$\pi(r_i + r_j)^2 < v_{1,1}(r_i, r_j) > \leq 4\pi (r_{min})^2 < v_{1,1}(r_{min}, r_{min}) >,$$

et donc

$$\nu_{11} \leq n_1^\circ 4\pi (r_{min})^2 \sqrt{2} \left[\frac{8k_B T^\circ}{\pi m_1(r_{min})} \right]^{1/2}.$$

Effectuons une estimation de ces fréquences de collision en fonction des densités n_1° et n_2° pour les valeurs numériques suivantes (qui correspondent à des particules de poussière en tungstène et des molécules d'azote) :

$$\begin{cases} r_{min} &= 5 \cdot 10^{-9} \text{ m} \\ r_{max} &= 5 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ \varrho &= 2 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\ m_1(r_{min}) &= 10^{-20} \text{ kg} \\ m_2 &= 4,6 \cdot 10^{-26} \text{ kg}. \end{cases}$$

On obtient :

$$\frac{\nu_{11}}{\nu_{22}} \leq \frac{n_1^\circ}{n_2^\circ}, \quad (1.24)$$

$$\frac{\nu_{22}}{\nu_{12}} \sim 2 \cdot 10^{-8}, \quad (1.25)$$

et

$$\frac{\nu_{11}}{\nu_{21}} \leq 3 \cdot 10^{-8}. \quad (1.26)$$

L'hypothèse (1.1) couplée aux estimations (1.24), (1.25) et (1.26) nous permet donc d'établir que

$$\nu_{11} \ll \nu_{22} \ll \nu_{12}$$

et

$$\nu_{11} \ll \nu_{21}.$$

De plus, l'échelle de temps à laquelle on s'intéresse dans le contexte d'un accident de perte de vide (avant que les modèles fluides ne retrouvent leur validité) est inférieure à une seconde (à comparer à $1/\nu_{11} \approx 40$ s pour $n_1^o = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ et $n_2^o = 10^{21} \text{ m}^{-3}$). Dans ce contexte, on peut donc négliger les collisions entre particules de poussière.

1.1.3 Écriture du modèle mathématique

Le système régissant l'évolution des densités f_1 et f_2 s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_1 = R_1(f_1, f_2), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_2 = R_2(f_1, f_2) + Q(f_2, f_2), \\ x \in \Omega, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad r \in [r_{min}, r_{max}], \quad t \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (1.27)$$

où $Q(f_2, f_2)$ est l'opérateur décrivant les collisions entre les molécules, $R_1(f_1, f_2)$ celui décrivant les collisions entre particules de poussière et molécules, et $R_2(f_1, f_2)$ celui décrivant les collisions entre molécules et particules de poussière.

On supposera que l'interaction entre les molécules correspond à un potentiel dur. L'opérateur $Q(f_2, f_2)$ s'écrit dans ce cas sous la forme :

$$\begin{aligned} & Q(f_2, f_2)(t, x, v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_2(t, x, v') f_2(t, x, v'_*) - f_2(t, x, v) f_2(t, x, v_*)] b(\cos(\chi)) |v - v_*|^\delta d\sigma dv_*, \end{aligned} \quad (1.28)$$

avec $\cos(\chi) = \frac{|\sigma \cdot (v - v_*)|}{|v - v_*|}$, $\delta \in]0, 1]$, et

$$\begin{cases} v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \\ v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma. \end{cases}$$

Nous considérons ensuite deux modèles de collisions entre les molécules et les particules menant à deux types d'expression pour les opérateurs $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$. Le premier modèle que nous décrivons est similaire aux modèles existants dans la théorie des mélanges gazeux et est basé sur un mécanisme collisionnel élastique entre molécules et particules de poussière. Nous proposons ensuite un nouveau modèle basé sur un mécanisme collisionnel de réflexion diffuse sur la surface des particules de poussière.

1.2 Modèle de collision élastique

1.2.1 Présentation de $R_1^e(f_1, f_2)$ et $R_2^e(f_1, f_2)$

Nous supposons dans ce premier modèle que les collisions entre les molécules et les particules de poussière sont élastiques. Cette hypothèse, physiquement peu réaliste en raison de la grande différence d'échelle entre les molécules et les particules, nous permet cependant de disposer d'un modèle pour les opérateurs R_1 et R_2 relativement simple. Nous avons dans ce cas les relations suivantes liant les vitesses pré-collisionnelles (v_1, v_2) et post-collisionnelles (v'_1, v'_2) d'une particule et d'une molécule :

$$m_2 v'_2 + m_1(r) v'_1 = m_2 v_2 + m_1(r) v_1, \quad (1.29)$$

$$m_2 |v'_2|^2 + m_1(r) |v'_1|^2 = m_2 |v_2|^2 + m_1(r) |v_1|^2. \quad (1.30)$$

À partir de (1.29) et (1.30), on montre qu'il existe $\omega \in \mathbb{S}^2$ tel que que l'on ait

$$\begin{cases} v'_1 = v_1 + \frac{2m_2}{m_1(r) + m_2} [\omega \cdot (v_2 - v_1)] \omega, \\ v'_2 = v_2 - \frac{2m_1(r)}{m_1(r) + m_2} [\omega \cdot (v_2 - v_1)] \omega. \end{cases} \quad (1.31)$$

On peut alors introduire, comme dans le cas de collisions entre deux particules de même espèce, l'opérateur linéaire $T_\omega^{1,2}$ agissant sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par

$$T_\omega^{1,2}(v_1, v_2) = (v'_1, v'_2).$$

Cet opérateur vérifie les propriétés suivantes :

$$T_\omega^{1,2} \circ T_\omega^{1,2} = \text{Id}, \quad (1.32)$$

et

$$|\det T_\omega^{1,2}| = 1. \quad (1.33)$$

De plus, en notant $v_r := v_2 - v_1$ la vitesse relative entre les deux particules, on observe que $v'_r = v_r - 2[\omega \cdot v_r] \omega$. Autrement dit, la vitesse relative post-collisionnelle est l'image de la vitesse relative pré-collisionnelle par la symétrie plane relativement au plan orthogonal à ω . En particulier, la norme de v_r est conservée.

Les opérateurs $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$, notés ici $R_1^e(f_1, f_2)$ et $R_2^e(f_1, f_2)$, prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} R_1^e(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_1(t, x, v'_1, r) f_2(t, x, v'_2) - f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2)] \\ &\quad \times q(|v_2 - v_1|, |\omega \cdot (v_2 - v_1)|, r) d\omega dv_2, \end{aligned} \quad (1.34)$$

et

$$\begin{aligned} R_2^e(f_1, f_2)(t, x, v_2) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} [f_1(t, x, v'_1, r) f_2(t, x, v'_2) - f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2)] \\ &\quad \times q(|v_2 - v_1|, |\omega \cdot (v_2 - v_1)|, r) dr d\omega dv_1, \end{aligned} \quad (1.35)$$

où $(v'_1, v'_2) = T_\omega^{1,2}(v_1, v_2)$. On supposera que cette section de collision q est une section de sphères dures, donnée par :

$$q(|\xi|, |\omega \cdot \xi|, r) = \frac{1}{2}(r + \varrho)^2 |\omega \cdot \xi|. \quad (1.36)$$

1.2.2 Propriétés des opérateurs $R_1^e(f_1, f_2)$ et $R_2^e(f_1, f_2)$

On établit facilement, grâce au caractère involutif de $T_\omega^{1,2}$, les propriétés (formelles) suivantes.

Proposition 1.1 *On considère les opérateurs de collisions d'expressions (1.28), (1.34) et (1.35) avec $f_2 = f_2(t, x, v)$, $f_1 = f_1(t, x, v, r)$, $\varphi = \varphi(v, r)$ et $\psi = \psi(v)$ des fonctions "convenables" (telles que les intégrales suivantes existent). Alors, on a, au moins formellement,*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} R_1^e(f_1, f_2)(v_1, r) \varphi(v_1, r) dv_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [\varphi(v'_1, r) - \varphi(v_1, r)] f_1(v_1, r) f_2(v_2) q(|v_2 - v_1|, |\omega \cdot (v_2 - v_1)|, r) d\omega dv_2 dv_1, \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} R_2^e(f_1, f_2)(v_2) \psi(v_2) dv_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} [\psi(v'_2) - \psi(v_2)] f_1(v_1, r) f_2(v_2) q(|v_2 - v_1|, |\omega \cdot (v_2 - v_1)|, r) dr d\omega dv_1 dv_2, \end{aligned} \quad (1.38)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \left[\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} R_1^e(f_1, f_2)(v, r) \varphi(v, r) dr + R_2^e(f_1, f_2)(v) \psi(v) \right] dv \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} [f_1(v'_1, r) f_2(v'_2) - f_2(v_2) f_1(v_1, r)] q(|v_2 - v_1|, |\omega \cdot (v_2 - v_1)|, r) \\ & \quad \times [\varphi(v'_1, r) + \psi(v'_2) - \varphi(v_1, r) - \psi(v_2)] dr d\omega dv_1 dv_2, \end{aligned} \quad (1.39)$$

où $(v'_1, v'_2) = T_\omega^{1,2}(v_1, v_2)$, et où l'on a omis les variables x et t dans f_1 et f_2 pour alléger l'écriture.

En particulier, on peut en déduire que $v \mapsto 1$ est un invariant collisionnel des opérateurs $R_1^e(f_1, f_2)$ et $R_2^e(f_1, f_2)$, et que $v \mapsto v$ et $v \mapsto |v|^2$ sont des invariants collisionnels de l'opérateur

$$S(f_1, f_2) = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} m_1(r) R_1^e(f_1, f_2)(\cdot, \cdot, \cdot, r) dr + m_2 R_2^e(f_1, f_2).$$

Autrement dit, sous réserve d'existence des intégrales suivantes, on a pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \Omega$:

$$\forall r \in [r_{\min}, r_{\max}] : \int_{\mathbb{R}^3} R_1^e(f_1, f_2)(t, x, v, r) dv = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} R_2^e(f_1, f_2)(t, x, v) dv = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} m_1(r) R_1^e(f_1, f_2)(t, x, v, r) dr + m_2 R_2^e(f_1, f_2)(t, x, v) \right] v dv = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} m_1(r) R_1^e(f_1, f_2)(t, x, v, r) dr + m_2 R_2^e(f_1, f_2)(t, x, v) \right] |v|^2 dv = 0.$$

1.3 Modèle de collision par réflexion diffuse

1.3.1 Hypothèses de modélisation

Les particules de poussière étant macroscopiques comparées aux molécules, on considère la surface d'une particule comme localement plane du point de vue d'une molécule incidente. Par analogie avec le modèle de condition aux limites de type réflexion diffuse, on suppose alors que la vitesse relative entre une particule et une molécule après une collision est donnée de façon probabiliste par une réflexion diffuse sur le plan tangent à la particule au point d'impact. Dans ce contexte, il paraît cohérent de considérer les particules de poussière et les molécules comme des sphères dures entrant en contact avant la collision (autrement dit, la section efficace (*cf.* Annexe A) pré-collisionnelle est une section de sphères dures). De plus, nous sommes amenés à introduire la température de surface des particules de poussière, que l'on va supposer identique pour toutes les particules et constante au cours du temps. On note celle-ci T_{surf} . La probabilité qu'une molécule heurtant la surface de la particule au point x et à l'instant t avec une vitesse incluse dans la classe $[v_r, v_r + dv_r]$ (c'est-à-dire que chaque coordonnée w^i de la vitesse w de la molécule est située dans l'intervalle $[v_r^i, v_r^i + dv_r^i]$) dans le référentiel lié à la particule en ressorte pratiquement au même endroit après un temps τ négligeable avec une vitesse dans la classe $[v'_r, v'_r + dv'_r]$ est, d'après (28),

$$K(v_r \rightarrow v'_r, x, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_2}{k_B T_{surf}} \right)^2 (n(x) \cdot v'_r) \exp \left(-\frac{m_2 |v'_r|^2}{2k_B T_{surf}} \right) \mathbb{1}_{\{n(x) \cdot v'_r \geq 0\}},$$

où $n(x)$ est la normale au plan tangent à la particule de poussière au point x dirigée vers l'extérieur de celui-ci. Cette probabilité ne dépendant que de v'_r et de $n(x)$, nous introduisons la densité de probabilité de la vitesse relative, notée

$$h_n(s) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_2}{k_B T_{surf}} \right)^2 (n \cdot s) \exp \left(-\frac{m_2 |s|^2}{2k_B T_{surf}} \right) \mathbb{1}_{\{n \cdot s \geq 0\}}. \quad (1.40)$$

Remarquons qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité puisque pour tout $n \geq 0$, $h_n(s) \geq 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}^3} h_n(w) dw = 1. \quad (1.41)$$

Nous pouvons dès maintenant tirer quelques conséquences des hypothèses effectuées :

- ▷ **Les collisions entre molécules et particules ne sont pas planes** : en effet, la direction de la vitesse post-collisionnelle relative est tirée de façon aléatoire dans tout le demi-espace limité par le plan tangent à la particule.
- ▷ Pour cette raison, **les collisions ne sont pas micro-réversibles**.
- ▷ La norme de cette vitesse relative post-collisionnelle étant elle aussi aléatoire, **l'énergie cinétique n'est pas conservée lors d'une collision**.
- ▷ Cependant, le système particules-molécules pouvant être considéré comme isolé dans le référentiel barycentrique (sous l'hypothèse de collisions binaires), **la quantité de mouvement est conservée lors d'une collision**.

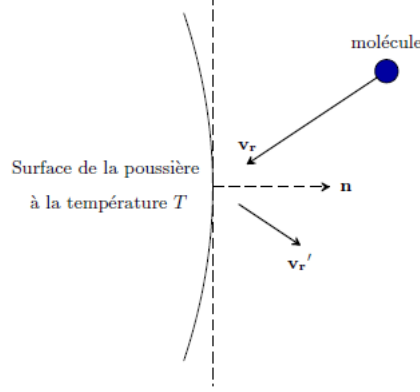


FIG. 1.1 – Réflexion diffuse d'une molécule sur la surface d'une particule de poussière

1.3.2 Etablissement des opérateurs de collision

Nous allons maintenant établir l'expression des opérateurs de collision associés à cette modélisation, notés $R_1^d(f_1, f_2)$ et $R_2^d(f_1, f_2)$. D'après les remarques ci dessus, on ne peut pas écrire ceux-ci sous une forme classique comme (1.34) et (1.35). Nous allons alors reprendre la démarche introduite dans [Ce1] pour les déterminer, c'est-à-dire effectuer le bilan de la variation due aux collisions du nombre de molécules ou de particules de poussière dans un élément de volume généralisé élémentaire $dx dv$.

1.3.2.1 Expression de $R_1^d(f_1, f_2)$

Proposition 1.2 *On se place dans le cadre physique décrit aux paragraphes 1.1 et 1.3.1. Alors l'opérateur de collision modélisant l'interaction entre les particules de poussière et les molécules, du point de vue des particules, prend la forme suivante :*

$$R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, x, v_1^\circ, r) f_2(t, x, v_2^\circ, r) (r + \varrho)^2 B_p(v_1^\circ, v_2^\circ, v_1) dv_2^\circ dv_1^\circ \\ - \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \pi(r + \varrho)^2 |v_1 - v_2| dv_2, \quad (1.42)$$

avec

$$B_p(v_1^\circ, v_2^\circ, v_1) = \frac{2}{\pi} \beta^4 \left(\frac{1 + \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} \right)^4 \exp \left[-\beta^2 \left(\frac{1 + \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} \right)^2 (v_B - v_1)^2 \right] \\ \times \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (v_1^\circ - v_2^\circ)] [n \cdot (v_B - v_1)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1^\circ - v_2^\circ) \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_B - v_1) \geq 0\}} dn, \quad (1.43)$$

où

$$v_B = \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} v_1^\circ + \frac{\varepsilon(r)}{1 + \varepsilon(r)} v_2^\circ, \quad (1.44)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{m_2}{2k_B T_{surf}}}, \quad (1.45)$$

et $\varepsilon(r)$ le rapport de masse défini par (1.5).

Preuve de la Proposition 1.2. Dans l'élément de volume généralisé $dx dv$, la variation du nombre de particules de poussière pendant le temps dt peut s'exprimer par

$$\frac{df_1}{dt} dx dv dt = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_1 \right) dx dv dt.$$

Introduisons $R_1^{d+}(f_1, f_2)$ et $R_1^{d-}(f_1, f_2)$ les densités de probabilité des particules qui entrent ou qui sortent de la catégorie considérée : $R_1^{d+}(f_1, f_2) dv dx dt$ représente le nombre de particules dont la position entre dans la classe $[x, x + dx]$ et dont la vitesse entre dans la classe $[v, v + dv]$, et $R_1^{d-}(f_1, f_2) dv dx dt$ le nombre de particules dont la position sort de la classe $[x, x + dx]$ et dont la vitesse sort de la classe $[v, v + dv]$. Le bilan collisionnel s'écrit :

$$\frac{df_1}{dt} dx dv dt = R_1^+(f_1, f_2) dv dx dt - R_1^-(f_1, f_2) dv dx dt. \quad (1.46)$$

L'opérateur $R_1^d(f_1, f_2)$ s'exprime donc par la relation :

$$R_1^d(f_1, f_2) = R_1^{d+}(f_1, f_2) - R_1^{d-}(f_1, f_2). \quad (1.47)$$

Détermination de $R_1^{d-}(f_1, f_2)$: On considère une particule cible de vitesse appartenant à la classe $[v_1, v_1 + dv_1]$, de centre C_1 appartenant à la classe $[x, x + dx]$ et de rayon r . Une molécule de gaz, de centre C_2 , rencontrant cette particule, est repérée par une vitesse v_2 (à dv_2 près), un paramètre d'impact p , un angle azimutal ϵ (angle entre un plan de référence et le plan $(C_1, \overrightarrow{C_1 C_2}, v_2 - v_1)$: voir la figure 1.2). Cette molécule a alors une vitesse $v_r = v_2 - v_1$ (à $dv_1 + dv_2$ près) dans le référentiel lié à la particule. Le

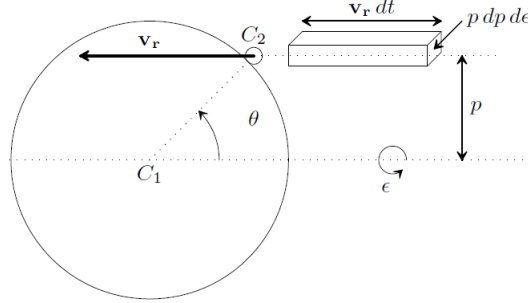


FIG. 1.2 – Détermination du nombre de molécules de vitesse v_2 (à dv_2 près) et de paramètres d'impact p et ϵ arrivant sur une particule de poussière cible pendant le temps dt .

nombre de molécules de vitesse appartenant à la classe $[v_2, v_2 + dv_2]$ et de paramètres b et ϵ arrivant sur cette particule cible pendant le temps dt est égal à

$$f_2(t, x, v_2) |v_2 - v_1| dt p dp d\epsilon dv_2.$$

De plus, puisque les molécules et les particules sont considérées comme des sphères dures, on a $p = (r + \varrho) \sin \theta$. Le nombre total de molécules dont la vitesse appartient à la classe

$[v_2, v_2 + dv_2]$ et entrant en collision avec la particule cible est donc

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} f_2(t, x, v_2) |v_1 - v_2| (r + \varrho)^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\epsilon dv_2 dt \\ &= f_2(t, x, v_2) \pi (r + \varrho)^2 |v_2 - v_1| dv_2 dt. \end{aligned}$$

Le nombre de particules de vitesse appartenant à la classe $[v_1, v_1 + dv_1]$ dans l'élément de volume dx étant égal à $f_1(t, x, v_1, r) dv dx$, le nombre de collisions de type $(v_1, v_2) \rightarrow (v'_1, v'_2)$ est alors

$$dN = f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \pi (r + \varrho)^2 |v_2 - v_1| dv_2 dv_1 dx dt.$$

D'où finalement,

$$R_1^{d-}(f_1, f_2)(t, x, v_1) = \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \pi (r + \varrho)^2 |v_2 - v_1| dv_2. \quad (1.48)$$

Remarquons que ce terme $R_1^{d-}(f_1, f_2)$ ne dépendant que de la section efficace pré-collisionnelle considérée (section de sphères dures ici), on retrouve la même expression que dans le cas d'un opérateur classique de même section de collision.

Détermination de $R_1^{d+}(f_1, f_2)$: À une vitesse post-collisionnelle (de particule) v_1 donnée, on va maintenant déterminer le nombre de collisions de type $(v_1^\circ, v_2^\circ) \rightarrow (v_1, v_2)$ (à dv_1 et dv_2 près) pendant le temps dt . On considère pour cela une particule cible de

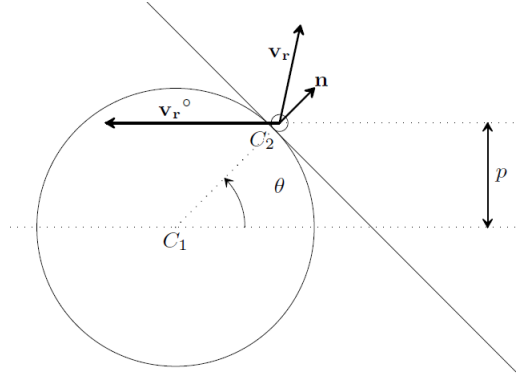


FIG. 1.3 – Réflexion diffuse d'une molécule sur le plan de normale n tangent à la particule de poussière.

vitesse appartenant à la classe $[v_1^\circ + dv_1^\circ]$ et de rayon r . Comme précédemment, le nombre de collisions avec des molécules de vitesse appartenant à la classe $[v_2^\circ + dv_2^\circ]$, de paramètres $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\epsilon \in [0, 2\pi]$ pendant le temps dt est

$$dN_1 = f_1(t, x, v_1^\circ, r) f_2(t, x, v_2^\circ) |v_1^\circ - v_2^\circ| (r + \varrho)^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\epsilon dv_2^\circ dv_1^\circ dx dt.$$

En introduisant le vecteur $n = \frac{\overrightarrow{C_1 C_2}}{|C_1 C_2|}$, où C_1 et C_2 sont les centres des deux particules, on a

$$n \cdot (v_1^\circ - v_2^\circ) = |v_1^\circ - v_2^\circ| \cos \theta,$$

et les conditions d'intégration pour les angles θ et ϵ deviennent

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \epsilon \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow n(x) \in \mathbb{S}^2 \text{ et } n \cdot (v_1^\circ - v_2^\circ) \geq 0. \quad (1.49)$$

On peut alors exprimer dN_1 en fonction du vecteur n et de l'angle solide $dn = \sin \theta d\theta d\epsilon$

$$dN_1 = f_1(t, x, v_1^\circ, rt) f_2(t, x, v_2^\circ) (r + \varrho)^2 [n \cdot (v_1^\circ - v_2^\circ)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1^\circ - v_2^\circ) \geq 0\}} dndv_2^\circ dv_1^\circ dx dt. \quad (1.50)$$

D'autre part, dans le référentiel centré en C_1 (le centre de la particule), une molécule de vitesse v_2° dans le référentiel absolu arrive sur la particule avec une vitesse relative $v_r^\circ = v_2^\circ - v_1^\circ$ et ressort après collision sur la particule avec une vitesse relative $v_r = v_2 - v_1$. Cette vitesse v_r est, rappelons-le, donnée par réflexion diffuse sur le plan de normale n . La collision est inélastique, mais en considérant le système molécule-particule comme isolé, la vitesse barycentrique v_B , et par conséquent la quantité de mouvement, est conservée. On a donc

$$v_B := \frac{m_1(r)}{m_2 + m_1(r)} v_1^\circ + \frac{m_2}{m_2 + m_1(r)} v_2^\circ = \frac{m_1(r)}{m_2 + m_1(r)} v_1 + \frac{m_2}{m_2 + m_1(r)} v_2. \quad (1.51)$$

Cela nous permet d'écrire les vitesses post-collisionnelles en fonction de v_B (qui est connue), et de $v_r = v_2 - v_1$ de densité de probabilité $h_n(s)$ définie avec (1.40) :

$$v_1 = v_B - \frac{\varepsilon(r)}{1 + \varepsilon(r)} v_r, \quad (1.52)$$

$$v_2 = v_B + \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} v_r.$$

D'après la relation (1.52), la densité de probabilité de la variable aléatoire v_1 correspondant à la vitesse post-collisionnelle de la particule de poussière s'exprime en fonction de celle de v_r par la relation :

$$l_1(s) = \left(\frac{1 + \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} \right)^3 h_n \left(-\frac{1 + \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} (s - v_B) \right).$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} l_1(s) = & \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_2}{k_B T_{surf}} \right)^2 \left(\frac{1 + \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} \right)^4 [n \cdot (v_B - s)] \\ & \times \exp \left[- \left(\frac{1 + \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} \right)^2 \frac{m_2}{2k_B T_{surf}} (v_B - s)^2 \right] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_B - s) \geq 0\}}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

La probabilité que cette vitesse appartienne à la classe $[v_1, v_1 + dv_1]$ étant $l(v_1)dv_1$, le nombre de collisions pendant le temps dt entre des particules de vitesse v_1° (à dv_1° près) et des molécules de vitesse v_2° (à dv_2° près) et de paramètres θ et ϵ , telles que la vitesse post-collisionnelle de la particule soit v_1 (à dv_1 près) et celle de la molécule soit v_2 (à dv_2 près), est alors :

$$dN = l(v_1)dv_1 dN_1. \quad (1.54)$$

Le nombre de particules dont la position est dans la classe $[x, x + dx]$ et dont la vitesse entre dans la classe $[v_1, v_1 + dv_1]$ pendant le temps dt est donc :

$$R_1^{d+}(f_1, f_2) dx dv_1 dt = \int_{n \in \mathbb{S}^2} \int_{v_2^\circ \in \mathbb{R}^3} \int_{v_1^\circ \in \mathbb{R}^3} l(v_1) dN_1 dv_1. \quad (1.55)$$

On obtient finalement

$$R_1^{d+}(f_1, f_2) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, x, v_1^\circ, r) f_2(t, x, v_2^\circ) (r + \varrho)^2 B_p(v_1^\circ, v_2^\circ, v_1) dv_2^\circ dv_1^\circ, \quad (1.56)$$

où $B_p(v_1^\circ, v_2^\circ, v_1)$ est donnée par (1.43). \diamond

1.3.2.2 Expression de $R_2^d(f_1, f_2)$

Proposition 1.3 *On se place dans le cadre physique décrit aux paragraphes 1.1 et 1.3.1. Alors l'opérateur de collision modélisant l'interaction entre les particules et les molécules, du point de vue des molécules, prend la forme suivante :*

$$\begin{aligned} R_2^d(f_1, f_2)(t, x, v_2) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, x, v_1^\circ, r) f_2(t, x, v_2^\circ) (r + \varrho)^2 B_m(v_1^\circ, v_2^\circ, v_2) dr dv_1^\circ dv_2^\circ \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \pi (r + \varrho)^2 |v_2 - v_1| dr dv_1, \end{aligned} \quad (1.57)$$

avec

$$\begin{aligned} B_m(v_1^\circ, v_2^\circ, v_2) &= \frac{2}{\pi} \beta^4 (1 + \varepsilon(r))^4 \exp \left[-\beta^2 (1 + \varepsilon(r))^2 (v_B - v_2)^2 \right] \\ &\quad \times \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (v_2^\circ - v_1^\circ)] [n \cdot (v_B - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_2^\circ - v_1^\circ) \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_B - v_2) \geq 0\}} dn, \end{aligned} \quad (1.58)$$

où v_B est donné par (1.44) et β par (1.45).

Preuve de la Proposition 1.3. On considère cette fois $R_2^{d+}(f_1, f_2)$ et $R_2^{d-}(f_1, f_2)$ les densités de probabilité des molécules qui entrent ou qui sortent d'un élément de volume généralisé $dx dv_2$; $R_2^{d+}(f_1, f_2) dv_2 dx dt$ représente ainsi le nombre de molécules dont la position entre dans la classe $[x, x + dx]$ et la vitesse entre dans la classe $[v_2, v_2 + dv_2]$, et $R_2^{d-}(f_1, f_2) dv_2 dx dt$ le nombre de molécules dont la position sort de la classe $[x, x + dx]$ et la vitesse sort de la classe $[v_2, v_2 + dv_2]$ en raison de collisions avec des particules. Ainsi, à l'instar de $R_1^d(f_1, f_2)$, $R_2^d(f_1, f_2)$ s'exprime par la relation

$$R_2^d(f_1, f_2) = R_2^{d+}(f_1, f_2) - R_2^{d-}(f_1, f_2).$$

Détermination de $R_2^{d-}(f_1, f_2)$: La détermination du terme de perte de $R_2^d(f_1, f_2)$ est similaire à celle effectuée pour $R_1^d(f_1, f_2)$; et comme ce terme ne dépend que de la section efficace de collision, on obtient facilement :

$$R_2^{d-}(f_1, f_2) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \pi (r + \varrho)^2 |v_2 - v_1| dr dv_1. \quad (1.59)$$

Détermination de $R_2^{d+}(f_1, f_2)$: À une vitesse post-collisionnelle de molécule v_2 donnée, on va maintenant déterminer le nombre de collisions de type $(v_1^\circ, v_2^\circ) \rightarrow (v_1, v_2)$ pendant le temps dt . On considère une molécule cible de vitesse v_2° (à dv_2° près). Comme précédemment, le nombre de collisions avec des particules de vitesse v_1° , de rayon appartenant à $[r, r + dr]$ et de paramètres $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\epsilon \in [0, 2\pi]$ pendant le temps dt est

$$dN_1 = f_1(t, x, v_1^\circ, r) f_2(t, x, v_2^\circ) |v_2^\circ - v_1^\circ| (r + \varrho)^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta d\epsilon dv_1^\circ dv_2^\circ dr dx dt,$$

ou encore, avec $n = \frac{\overrightarrow{C_2 C_1}}{|C_2 C_1|}$,

$$dN_1 = f_1(t, x, v_1^\circ, r) f_2(t, x, v_2^\circ) (r + \varrho)^2 (n \cdot (v_2^\circ - v_1^\circ)) \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_2^\circ - v_1^\circ) \geq 0\}} dndv_1^\circ dv_2^\circ dr dx dt.$$

Par ailleurs, en tenant compte de l'expression (1.40) de la densité de la variable aléatoire correspondant à la vitesse relative post-collisionnelle $v_r = v_1 - v_2$ et de la relation

$$v_2 = v_B - \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} v_r,$$

on trouve que la densité de probabilité de la variable aléatoire v_2 correspondant à la vitesse post-collisionnelle de la molécule dans le référentiel initial est donnée par

$$l_2(s) = h_n((1 + \varepsilon(r))(v_B - s)),$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} l_2(s) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_2}{k_B T_{surf}} \right)^2 (1 + \varepsilon(r))^4 (n \cdot (v_B - s)) \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{m_2}{2k_B T} (1 + \varepsilon(r))^2 (v_B - s)^2 \right] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_B - s) \geq 0\}}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Le nombre de molécules dont la position sort de la classe $[x, x + dx]$ et dont la vitesse sort de la classe $[v_2, v_2 + dv_2]$ pendant le temps dt est alors :

$$R_2^{d+}(f_1, f_2) dx dv_2 dt = \int_{n \in \mathbb{S}^2} \int_{r \in [r_{min}, r_{max}]} \int_{v_1^\circ \in \mathbb{R}^3} \int_{v_2^\circ \in \mathbb{R}^3} l_2(v_2) dN_1 dv_2.$$

On obtient finalement :

$$R_2^{d+}(f_1, f_2) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, x, v_1^\circ, r) f_2(t, x, v_2^\circ) (r + \varrho)^2 B_m(v_1^\circ, v_2^\circ, v_2) dv_1^\circ dv_2^\circ dr, \quad (1.61)$$

où $B_m(v_1^\circ, v_2^\circ, v_2)$ est donné par (1.58). \diamond

1.3.3 Autre formulation des opérateurs de collision

Nous nous proposons maintenant d'obtenir des formulations faibles des opérateurs $R_1^d(f_1, f_2)$ et $R_2^d(f_1, f_2)$ obtenues précédemment, qui soient proches des formulations faibles (1.37) et (1.38) obtenues pour les opérateurs élastiques $R_1^e(f_1, f_2)$ et $R_2^e(f_1, f_2)$. On a la Proposition suivante :

Proposition 1.4 Soit φ une fonction test (par exemple $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^3)$) et $R_1^d(f_1, f_2)$ l'opérateur d'expression (1.42). Alors on a, au moins formellement,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} R_1^d(f_1, f_2)(v, r) \varphi(v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} (r + \varrho)^2 [\varphi(v_1'') - \varphi(v_1)] f_1(v_1, r) f_2(v_2) \\ &\quad \times h_n(w) [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} dn dw dv_2 dv_1, \end{aligned} \quad (1.62)$$

où

$$v_1'' = \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} [v_1 + \varepsilon(r)v_2 - \varepsilon(r)w], \quad (1.63)$$

avec h_n donnée par (1.40), et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} R_2^d(f_1, f_2)(v) \varphi(v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} (r + \varrho)^2 [\varphi(v_2'') - \varphi(v_2)] f_1(v_1, r) f_2(v_2) \\ &\quad \times h_n(w) [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} dr dn dw dv_1 dv_2, \end{aligned} \quad (1.64)$$

où

$$v_2'' = \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} [v_1 + \varepsilon(r)v_2 + w], \quad (1.65)$$

en omettant les variables t et x dans les formules (1.62) et (1.64) pour les alléger.

L'expression (1.62) fait apparaître la quantité $\varphi(v_1'') - \varphi(v_1)$ où les vitesses v_1 et v_1'' , données par (1.63), peuvent s'interpréter comme étant respectivement les vitesses d'une particule avant et après une collision avec une molécule. Remarquons que l'on a

$$v_1'' - v_1 = \mathcal{O}(\varepsilon(r)),$$

ce qui s'explique physiquement par le fait que la vitesse d'une particule est peu modifiée lors d'une collision avec une molécule en raison de leur grande différence de masse. Cette remarque n'est par contre plus valable pour la différence $v_2'' - v_2$, où la vitesse v_2'' est donnée par (1.65) : en effet, la vitesse post-collisionnelle v_2'' d'une molécule n'a, elle, aucune raison d'être proche de sa vitesse pré-collisionnelle v_2 .

Preuve de la Proposition 1.4. Soit φ une fonction test et R_1^{d+} le terme de gain de l'opérateur R_1^d , donné par (1.56). On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v) R_1^{d+}(f_1, f_2)(t, x, v, r) dv \\ = (r + \varrho)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1^\circ, r) f_2(t, x, v_2^\circ) B_p(v_1^\circ, v_2^\circ, v_1) dv_2^\circ dv_1^\circ dv_1, \end{aligned} \quad (1.66)$$

où B_p s'exprime en fonction de h_n par :

$$\begin{aligned} B_p(v_1^\circ, v_2^\circ, v_1) \\ = \left(\frac{1 + \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} \right)^3 \int_{\mathbb{S}^2} h_n \left((v_B - v_1) \left(\frac{1 + \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} \right) \right) [n \cdot (v_1^\circ - v_2^\circ)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1^\circ - v_2^\circ) \geq 0\}} dn. \end{aligned} \quad (1.67)$$

On pose

$$w = (v_B - v_1) \left(\frac{1 + \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} \right) = \left(\frac{\varepsilon(r)}{1 + \varepsilon(r)} v_2^\circ + \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} v_1^\circ - v_1 \right) \left(\frac{1 + \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} \right),$$

et on considère dans l'intégrale (1.66) le changement de variables suivant :

$$(v_1, v_1^\circ, v_2^\circ) \rightarrow (w, v_1^\circ, v_2^\circ),$$

dont le jacobien vaut :

$$|J| = \left(\frac{1 + \varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} \right)^3.$$

On a par suite

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v) R_1^{d+}(f_1, f_2)(t, x, v, r) dv &= (r + \varrho)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \varphi(v_1'') \\ &\quad \times h_n(w) [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} dndwdv_2 dv_1 \end{aligned} \quad (1.68)$$

(en renommant v_1° en v_1 et v_2° en v_2), avec

$$v_1'' = \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} [v_1 + \varepsilon(r)(v_2 - w)].$$

Par ailleurs, comme pour tout vecteur n

$$\int_{\mathbb{R}^3} h_n(w) dw = 1,$$

et que pour tout vecteur $k \in \mathbb{R}^3$ (voir calcul 1 de Annexe C)

$$\int_{\mathbb{S}^2} (n \cdot k) \mathbb{1}_{\{n \cdot k > 0\}} dn = \pi |k|, \quad (1.69)$$

alors on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi R_1^{d-}(f_1, f_2) dv &= (r + \varrho)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) |v_1 - v_2| \pi dv_2 dv_1 \\ &= (r + \varrho)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \\ &\quad \times h_n(w) [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} dndwdv_2 dv_1. \end{aligned} \quad (1.70)$$

On déduit finalement (1.62) de (1.68) et (1.70). Ensuite, pour φ une fonction test et R_2^{d+} le terme de gain de l'opérateur R_2^d , on a

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} R_2^{d+}(f_1, f_2)(t, x, v_2) \varphi(v_2) dv_2 \\ &= \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, x, v_1^\circ, r) f_2(t, x, v_2^\circ) (r + \varrho)^2 B_m(v_1^\circ, v_2^\circ, v_2) \varphi(v_2) dr dv_1^\circ dv_2^\circ dv_2, \end{aligned} \quad (1.71)$$

où $B_m(v_1^\circ, v_2^\circ, v_2)$ est donné, d'après (1.58), par

$$B_m(v_1^\circ, v_2^\circ, v_2) = (1 + \varepsilon(r))^3 \int_{\mathbb{S}^2} h_n((1 + \varepsilon(r))(v_B - v_2))(n \cdot (v_2^\circ - v_1^\circ)) \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_2^\circ - v_1^\circ) \geq 0\}} dn.$$

On pose

$$w = (1 + \varepsilon(r))(v_2 - v_B) = (1 + \varepsilon(r)) \left(v_2 - \frac{\varepsilon(r)}{1 + \varepsilon(r)} v_2^\circ - \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} v_1^\circ \right),$$

et on effectue dans l'intégrale (1.71) le changement de variable :

$$(v_2, v_1^\circ, v_2^\circ) \rightarrow (w, v_1^\circ, v_2^\circ),$$

dont le jacobien vaut :

$$|J| = (1 + \varepsilon(r))^3.$$

Alors, en renommant v_1° en v_1 et v_2° en v_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} R_2^{d+}(f_1, f_2)(t, x, v_2) \varphi(v_2) dv_2 &= \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (r + \varrho)^2 f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \varphi(v_2'') \\ &\quad \times \int_{\mathbb{S}^2} h_n(-w) (n \cdot (v_2 - v_1)) \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_2 - v_1) \geq 0\}} dn dr dv_1 dv_2 dw, \end{aligned} \quad (1.72)$$

où

$$v_2 = \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} [v_1 + \varepsilon(r)v_2 + w].$$

De plus, comme $h_n(-w) = h_{-n}(w)$, le changement de variable $n \rightarrow -n$ donne :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{S}^2} h_n(-w) [n \cdot (v_2 - v_1)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_2 - v_1) \geq 0\}} dn \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} h_n(w) [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} dn. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Par ailleurs, grâce à (1.69), on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} R_2^{d-}(f_1, f_2)(t, x, v_2) \varphi(v_2) dv_2 &= \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (r + \varrho)^2 f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \varphi(v_2) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{S}^2} h_n(w) [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} dn dr dv_1 dv_2 dw. \end{aligned} \quad (1.74)$$

On déduit alors (1.64) de (1.72), (1.73) et (1.74). \diamond

Les propriétés (1.62) et (1.64) montrent que $v \mapsto 1$ est un invariant collisionnel de $R_1^d(f_1, f_2)$ et $R_2^d(f_1, f_2)$, ce qui correspond à la conservation du nombre de particules. De plus, remarquons que

$$\frac{1}{\varepsilon(r)} v_1'' + v_2'' = \frac{1}{\varepsilon(r)} v_1 + v_2,$$

où v_1'' et v_2'' sont donnés par (1.63) et (1.65). On en déduit que $v \mapsto v$ est un invariant collisionnel de l'opérateur

$$\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{1}{\varepsilon(r)} R_1^d(f_1, f_2)(\cdot, \cdot, r) dr + R_2^d(f_1, f_2).$$

On déduit ensuite de la Proposition 1.4 une autre expression des opérateurs de collision $R_1^d(f_1, f_2)$ et $R_2^d(f_1, f_2)$.

Proposition 1.5 *Les opérateurs de collision (1.42) et (1.57) peuvent s'écrire sous la forme :*

$$\begin{aligned} R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) = & \frac{2\beta^4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (v_1 - v_2)] [n \cdot w] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) > 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot w \geq 0\}} \\ & \times (r + \varrho)^2 \left[f_1(t, x, v_1'', r) f_2(t, x, v_2'') \exp\left(-\beta^2(v_1 - v_2)^2\right) \right. \\ & \left. - f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \exp\left(-\beta^2(v_1'' - v_2'')^2\right) \right] dndwdv_2, \end{aligned} \quad (1.75)$$

et

$$\begin{aligned} R_2^d(f_1, f_2)(t, x, v_2) = & \frac{2\beta^4}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (v_1 - v_2)] [n \cdot w] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot w \geq 0\}} \\ & \times (r + \varrho)^2 \left[f_1(t, x, v_1'', r) f_2(t, x, v_2'') \exp\left(-\beta^2(v_1 - v_2)^2\right) \right. \\ & \left. - f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \exp\left(-\beta^2(v_1'' - v_2'')^2\right) \right] dndwdv_1 dr, \end{aligned} \quad (1.76)$$

avec

$$v_1'' = \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} (v_1 + \varepsilon(r)v_2 - \varepsilon(r)w), \quad (1.77)$$

$$v_2'' = \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} (v_1 + \varepsilon(r)v_2 + w), \quad (1.78)$$

et β donnée par (1.45).

Remarque 1.1 Notons que $v_2'' - v_1'' = w$ dans (1.75) et (1.76).

Preuve de la Proposition 1.5. Reprenons l'expression (1.68) dans laquelle on effectue le changement de variable :

$$(v_1, v_2, w) \rightarrow (v_1'', v_2'', u)$$

avec $u = v_2 - v_1$. Autrement dit, on a

$$\begin{pmatrix} v_1'' \\ v_2'' \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_3}{1+\varepsilon(r)} & \frac{\varepsilon(r)I_3}{1+\varepsilon(r)} & \frac{-\varepsilon(r)I_3}{1+\varepsilon(r)} \\ \frac{I_3}{1+\varepsilon(r)} & \frac{\varepsilon(r)I_3}{1+\varepsilon(r)} & \frac{I_3}{1+\varepsilon(r)} \\ -I_3 & I_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ w \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ w \end{pmatrix}$$

où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Cette transformation est involutive ($M^2 = 1$). Par conséquent la valeur absolue du jacobien de la transformation est égal à 1, le

changement de variable est bijectif entre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, et (v_1, v_2, w) s'exprime en fonction de (v_1', v_2', u) par :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{1 + \varepsilon(r)}(v_1'' + \varepsilon(r)v_2'' - \varepsilon(r)u), \\ v_2 &= \frac{1}{1 + \varepsilon(r)}(v_1'' + \varepsilon(r)v_2'' + u), \\ w &= v_2'' - v_1''. \end{aligned} \tag{1.79}$$

Alors, en utilisant (1.68), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v) R_1^{d+}(f_1, f_2)(t, x, v, r) dv \\ &= (r + \varrho)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(v_1'') f_1 \left(t, x, \frac{v_1'' + \varepsilon v_2'' - \varepsilon u}{1 + \varepsilon(r)}, r \right) f_2 \left(t, x, \frac{v_1'' + \varepsilon v_2'' + u}{1 + \varepsilon(r)} \right) \\ & \quad \times h_n(v_2'' - v_1'') [n \cdot (-u)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (-u) \geq 0\}} dndudv_2'' dv_1'' \\ &= (r + \varrho)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_1(t, x, v_1'', r) f_2(t, x, v_2'') \varphi(v_1) h_n(v_2 - v_1) \\ & \quad \times (-n \cdot w) \mathbb{1}_{\{-n \cdot w \geq 0\}} dndw dv_2 dv_1, \end{aligned}$$

grâce au caractère involutif de la transformation $(v_1, v_2, w) \rightarrow (v_1'', v_2'', u)$, et en renommant (v_1'', v_2'', u) en (v_1, v_2, w) . Ensuite, par le changement de variables $n \rightarrow -n$, et grâce au fait que $h_{-n}(v_2 - v_1) = h_n(v_1 - v_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v) R_1^{d+}(f_1, f_2)(t, x, v, r) dv \\ &= \frac{2\beta^4}{\pi} (r + \varrho)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1'', r) f_2(t, x, v_2'') \exp(-\beta^2(v_1 - v_2)^2) \\ & \quad \times \int_{\mathbb{S}^2} (n \cdot w) [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot w \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} dndw dv_2 dv_1. \end{aligned} \tag{1.80}$$

Par ailleurs, d'après (1.70), on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v) R_1^{d-}(f_1, f_2)(t, x, v, r) dv \\ &= \frac{2\beta^4}{\pi} (r + \varrho)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \exp(-\beta^2 w^2) \\ & \quad \times \int_{\mathbb{S}^2} (n \cdot w) [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot w \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} dndw dv_2 dv_1. \end{aligned} \tag{1.81}$$

En remarquant que $v_2'' - v_1'' = w$, on obtient finalement la forme faible (1.75) pour $R_1^d(f_1, f_2)$. Puis, d'après (1.72) et (1.73), on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} R_2^{d+}(f_1, f_2)(t, x, v_2) \varphi(v_2) dv_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} (r + \varrho)^2 f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \varphi(v_2'') \\
&\quad \times \int_{\mathbb{S}^2} h_n(v_2'' - v_1'') [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} dndv_1 dv_2 dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} (r + \varrho)^2 f_1(t, x, v_1'', r) f_2(t, x, v_2'') \varphi(v_2) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{S}^2} h_n(v_2 - v_1) (-n \cdot u) \mathbb{1}_{\{-n \cdot u \geq 0\}} dndv_1 dv_2 dw,
\end{aligned}$$

grâce au caractère involutif de la transformation $(v_1, v_2, w) \rightarrow (v_1'', v_2'', u)$. Grâce au changement de variables $n \rightarrow -n$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} R_2^{d+}(f_1, f_2)(t, x, v_2) \varphi(v_2) dv_2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} (r + \varrho)^2 f_1(t, x, v_1'', r) f_2(t, x, v_2'') \varphi(v_2) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{S}^2} h_n(v_1 - v_2) [n \cdot u] \mathbb{1}_{\{n \cdot u \geq 0\}} dndr dv_1 dv_2 dw.
\end{aligned} \tag{1.82}$$

On déduit finalement (1.76) de (1.82) (dans laquelle on renomme u en w) et de (1.74). \diamond

1.3.4 Modèle “pseudo-maxwellien”

Nous introduisons maintenant un modèle “pseudo-maxwellien” pour les opérateurs $R_1^d(f_1, f_2)$ et $R_2^d(f_1, f_2)$. Ce modèle n'a pas de justification physique. L'objectif de celui-ci est uniquement de valider les calculs numériques des Chapitres 3 et 6. Les opérateurs de collision, notés $R_1^{dm}(f_1, f_2)$ et $R_2^{dm}(f_1, f_2)$, sont définis sous forme faible par :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} R_1^{dm}(f_1, f_2)(t, x, v, r) \varphi(v) dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} C_m(r) [\varphi(v_1'') - \varphi(v_1)] f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) h_n(w) dndw dv_2 dv_1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} R_2^{dm}(f_1, f_2)(t, x, v) \varphi(v) dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} C_m(r) [\varphi(v_2'') - \varphi(v_2)] f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) h_n(w) dr dndw dv_2 dv_1,
\end{aligned}$$

où C_m est une fonction positive de la variable r et v_1'' et v_2'' sont données par (1.77) et (1.78).

1.3.5 Améliorations possibles du modèle

Prise en compte de la température des particules de poussière comme variable.

Dans le modèle présenté dans cette partie, nous avons supposé que toutes les particules possédaient la même température de surface T_{surf} . Or, nous pouvons aussi introduire la température de surface T_{surf} comme variable dans la fonction de densité f_1 des particules. Avec ce type de modélisation, f_1 est une fonction de la forme

$$f_1 : (t, x, v, T_{surf}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{+*} \mapsto f_1(t, x, v, T_{surf}).$$

L'opérateur de collision $R_1(f_1, f_2)$ dépend alors lui aussi de cette variable T_{surf} . Quant à $R_2(f_1, f_2)$, il s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} R_2^d(f_1, f_2)(t, x, v_2) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_0^\infty (r + \varrho)^2 f_1(t, x, v_1^\circ, r, T_{surf}) f_2(t, x, v_2^\circ) B_m(v_1^\circ, v_2^\circ, v_2, T_{surf}) dT_{surf} dr dv_1^\circ dv_2^\circ \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_0^\infty f_1(t, x, v_1, r, T_{surf}) f_2(t, x, v_2) \pi(r + \varrho)^2 |v_2 - v_1| dT_{surf} dr dv_1 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} B_m(v_1^\circ, v_2^\circ, v_2, T_{surf}) &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{m_2}{2k_B T_{surf}} \right)^2 (1 + \varepsilon(r))^4 \exp \left[- (1 + \varepsilon(r))^2 \left(\frac{m_2}{2k_B T_{surf}} \right) (v_B - v_2)^2 \right] \\ &\quad \times \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (v_1^\circ - v_2^\circ)] [n \cdot (v_2 - v_B)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1^\circ - v_2^\circ) > 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_2 - v_B) > 0\}} dn. \end{aligned}$$

Si on fait l'hypothèse que la température de chaque particule reste constante au cours du temps, alors les densités sont encore solutions du système d'équations (1.27).

Prise en compte de la gravité.

On peut choisir de tenir compte des forces extérieures dans notre modèle. Le système (1.27) se réécrit alors de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_1 + \frac{F_1}{m_1(r)} \cdot \nabla_v f_1 = R_1(f_1, f_2), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_2 + \frac{F_2}{m_2} \cdot \nabla_v f_2 = R_2(f_1, f_2) + Q(f_2, f_2), \end{cases}$$

où F_1 est une force s'exerçant sur les particules de poussière, et F_2 une force s'exerçant sur les molécules. On s'intéressera en particulier au Chapitre 4 au cas où le système est soumis à un champ de gravité.

Chapitre 2

Étude de l'existence de solutions au couplage Boltzmann/Boltzmann homogène en espace dans le cas de collisions élastiques

Sommaire

2.1	Notations	70
2.2	Introduction	71
2.3	Existence d'une solution pour le système avec sections de collisions tronquées	75
2.3.1	Opérateurs de collisions à sections tronquées	75
2.3.2	Existence de solutions approchées (f_1^n, f_2^n)	77
2.3.3	Conservation de la masse et de l'énergie	81
2.3.4	Propagation de la positivité	82
2.3.5	Décroissance de l'entropie	87
2.4	Existence d'une solution (f_1, f_2) pour le couplage B/B	92
2.4.1	Extraction d'une sous-suite convergente de $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$	92
2.4.2	Convergence des opérateurs de collision	94
2.5	Établissement de l'inégalité d'entropie	103
2.6	Établissement de la relation de conservation de l'énergie cinétique	111

2.1 Notations

Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^d , E un espace de Banach, γ , r_{min} et r_{max} des réels tels que $\gamma > 0$ et $0 < r_{min} < r_{max}$.

Espaces fonctionnels et normes

$C_c^p(\Omega)$ Ensemble des fonctions $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^p et à support compact sur Ω .

$L \log L$ Ensemble des fonctions $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ positives p.p. et telles que

$$\int_{\mathbb{R}^3} h(v) |\ln(h(v))| dv < \infty.$$

$L_r \log L_r$ Ensemble des fonctions $h : \mathbb{R}^3 \times [r_{min}, r_{max}] \rightarrow \mathbb{R}$ positives p.p. et telles que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} h(v, r) |\ln(h(v, r))| dr dv < \infty.$$

L_γ^1 Espace $L^1(\mathbb{R}^3; (1 + |v|^\gamma)dv)$, que l'on munit de la norme

$$\|\varphi\|_{L_\gamma^1} = \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(v)| (1 + |v|^\gamma) dv.$$

$L_{\gamma,r}^1$ Espace $L^1(\mathbb{R}^3 \times]r_{min}, r_{max}[; (1 + |v|^\gamma)dvdr)$, que l'on munit de la norme

$$\|\psi\|_{L_{\gamma,r}^1} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} |\psi(v, r)| (1 + |v|^\gamma) dr dv.$$

$\|(\psi, \varphi)\|_c$ Norme sur l'espace $L_{2,r}^1 \times L_2^1$, définie par :

$$\|(\psi, \varphi)\|_c = \|\psi\|_{L_{2,r}^1} + \|\varphi\|_{L_2^1}. \quad (2.1)$$

$L_{T,\gamma}^1$ Espace $L^1([0, T[\times \mathbb{R}^3; (1 + |v|^\gamma)dt dv)$.

$L_{T,\gamma,r}^1$ Espace $L^1([0, T[\times \mathbb{R}^3 \times]r_{min}, r_{max}[; (1 + |v|^\gamma)dt dvdr)$.

$L^\infty(\Omega; E)$ Espace des fonctions u mesurables sur Ω à valeurs dans $(E, \|\cdot\|_E)$ pour lesquelles il existe une constante C telle que pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\|u(x)\|_E \leq C.$$

$L_{T,v}^\infty$ Espace $L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$.

$L_{T,v,r}^\infty$ Espace $L^\infty([0, T[\times \mathbb{R}^3 \times]r_{min}, r_{max}[; \mathbb{R})$.

$\text{Lip}([0, T], E)$ Ensemble des fonctions lipchitziennes sur $[0, T]$ à valeurs dans $(E, \|\cdot\|_E)$.

Masse et entropie

Pour $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow E \in L^1(\mathbb{R}^3)$, on définit la masse de h par

$$\mu(h) = \int_{\mathbb{R}^3} h(v) dv. \quad (2.2)$$

Pour $(h_1, h_2) \in L_r \log L_r \times L \log L$, on définit l'entropie du couple (h_1, h_2) par

$$\mathcal{H}(h_1, h_2) = \int_{\mathbb{R}^3} \left[h_2(v) \ln(h_2(v)) + \int_{r_{min}}^{r_{max}} h_1(v, r) \ln(h_1(v, r)) dr \right] dv. \quad (2.3)$$

La convention de signe utilisée ici est celle des mathématiciens : l'entropie y est une fonction décroissante.

2.2 Introduction

Nous nous intéressons dans ce Chapitre à l'étude de l'existence de solutions à un couplage de deux équations de Boltzmann spatialement homogènes, d'inconnues

$$f_1 : (t, v, r) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times [r_{min}, r_{max}] \mapsto f_1(t, v, r) \geq 0$$

la densité en particules de poussière, où $0 < r_{min} < r_{max}$, et

$$f_2 : (t, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \mapsto f_2(t, v) \geq 0$$

la densité en molécules de gaz. Ce couplage s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} = R_1^e(f_1, f_2), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = R_2^e(f_1, f_2) + Q(f_2, f_2), \end{cases} \quad (2.4)$$

avec les conditions initiales :

$$f_1(0, v, r) = f_{1,in}(v, r), \quad f_2(0, v) = f_{2,in}(v).$$

Ici, $Q(f_2, f_2)$ est l'opérateur de collision entre les molécules, donné par

$$Q(f_2, f_2)(t, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left[f_2(t, v') f_2(t, v'_*) - f_2(t, v) f_2(t, v_*) \right] B(|v - v_*|, \cos(\chi)) d\sigma dv_*, \quad (2.5)$$

où χ est l'angle défini par $\cos(\chi) = \frac{|\sigma \cdot (v - v_*)|}{|v - v_*|}$, et (v', v'_*) sont les vitesses post-collisionnelles données par

$$\begin{cases} v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \\ v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma. \end{cases} \quad (2.6)$$

Rappelons que pour toute fonction test φ , on a formellement :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} Q(f_2, f_2)(t, v) \varphi(t, v) dv \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} (f_2(t, v') f_2(t, v'_*) - f_2(t, v) f_2(t, v_*)) B(|v - v_*|, \cos(\chi)) \\ & \quad \times (\varphi(t, v') + \varphi(t, v'_*) - \varphi(t, v) - \varphi(t, v_*)) d\sigma dv dv_*. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Les opérateurs $R_1^e(f_1, f_2)$ et $R_2^e(f_1, f_2)$ de collision entre particules de poussière et molécules sont donnés par

$$\begin{aligned} R_1^e(f_1, f_2)(t, v_1, r) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_1(t, v'_1, r) f_2(t, v'_2) - f_1(t, v_1, r) f_2(t, v_2)] \\ & \quad \times q(|v_1 - v_2|, |\omega \cdot (v_1 - v_2)|, r) d\omega dv_2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

et

$$\begin{aligned} R_2^e(f_1, f_2)(t, v_2) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [f_1(t, v'_1, r) f_2(t, v'_2) - f_1(t, v_1, r) f_2(t, v_2)] \\ & \quad \times q(|v_2 - v_1|, |\omega \cdot (v_2 - v_1)|, r) dr d\omega dv_1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

où v'_1 et v'_2 sont les vitesses post-collisionnelles relatives aux particules de poussières et molécules respectivement, données par

$$v'_1 = v_1 + \frac{2\varepsilon(r)}{1 + \varepsilon(r)} [\omega \cdot (v_2 - v_1)] \omega, \quad (2.10)$$

$$v'_2 = v_2 - \frac{2}{1 + \varepsilon(r)} [\omega \cdot (v_2 - v_1)] \omega, \quad (2.11)$$

dans lequel $\varepsilon(r)$ représente le rapport de masse entre une molécule et un grain de poussière de rayon r . Rappelons que

$$T_\omega^{1,2} : (v_1, v_2) \mapsto (v'_1, v'_2),$$

définie par les relations (2.10) et (2.11), est une involution. De plus, on vérifie à partir des relations (2.10) les égalités suivantes :

$$\varepsilon(r) v'_2 + v'_1 = \varepsilon(r) v_2 + v_1, \quad (2.12)$$

$$\varepsilon(r) |v'_2|^2 + |v'_1|^2 = \varepsilon(r) |v_2|^2 + |v_1|^2, \quad (2.13)$$

et en écrivant l'expression de la vitesse $\varepsilon(r) v_2 + v_1$ sous la forme

$$\varepsilon(r) |v_2|^2 + |v_1|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} (\varepsilon(r) v_2 + v_1)^2 + \frac{\varepsilon(r)}{1 + \varepsilon(r)} (v_1 - v_2)^2,$$

on en déduit que la norme de la vitesse relative est également conservée, c'est-à-dire :

$$|v'_1 - v'_2| = |v_1 - v_2|. \quad (2.14)$$

Notons que la relation (2.13) est équivalente à la suivante :

$$\varepsilon_m |v'_2|^2 + \left(\frac{r}{r_{min}}\right)^3 |v'_1|^2 = \varepsilon_m |v_2|^2 + \left(\frac{r}{r_{min}}\right)^3 |v_1|^2, \quad (2.15)$$

dans laquelle $\varepsilon_m = \varepsilon(r_{min}) = (r/r_{min})^3 \varepsilon(r)$. On peut déduire du caractère involutif $T_\omega^{1,2}$ et de (2.14) les relations formelles suivantes, valables pour toutes fonctions tests φ et ψ :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \left[\int_{r_{min}}^{r_{max}} R_1^e(f_1, f_2)(v, r) \varphi(v, r) dr + R_2^e(f_1, f_2)(v) \psi(v) \right] dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_2(v_2) f_1(v_1, r) q(|v_2 - v_1|, |\omega \cdot (v_2 - v_1)|, r) \\ & \quad \times [\varphi(v'_1, r) + \psi(v'_2) - \varphi(v_1, r) - \psi(v_2)] dr d\omega dv_1 dv_2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \left[\int_{r_{min}}^{r_{max}} R_1^e(f_1, f_2)(v, r) \varphi(v, r) dr + R_2^e(f_1, f_2)(v) \psi(v) \right] dv \\ &= -\frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [f_1(v'_1, r) f_2(v'_2) - f_2(v_2) f_1(v_1, r)] q(|v_2 - v_1|, |\omega \cdot (v_2 - v_1)|, r) \\ & \quad \times [\varphi(v'_1, r) + \psi(v'_2) - \varphi(v_1, r) - \psi(v_2)] dr d\omega dv_1 dv_2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

En particulier, on obtient à partir de (2.15) et de (2.16) la propriété formelle suivante : pour tout $t \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} R_1^e(f_1, f_2)(t, v, r) |v|^2 \left(\frac{r}{r_{min}}\right)^3 dr dv + \varepsilon_m \int_{\mathbb{R}^3} R_2^e(f_1, f_2)(t, v) |v|^2 dv = 0. \quad (2.18)$$

Par ailleurs, $v \mapsto 1$ est un invariant collisionnel des opérateurs $R_1^e(f_1, f_2)$ et $R_2^e(f_1, f_2)$: pour tout $t \geq 0$, pour tout $r \in [r_{min}, r_{max}]$, on a, au moins formellement,

$$\int_{\mathbb{R}^3} R_1^e(f_1, f_2)(t, v, r) dv = 0, \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^3} R_2^e(f_1, f_2)(t, v) dv = 0. \quad (2.19)$$

Nous supposons dans ce Chapitre que l'interaction entre les molécules et les particules de poussière est de type sphères dures ; le noyau des opérateurs $R_1^e(f_1, f_2)$ et $R_2^e(f_1, f_2)$ est ainsi donné par

$$q(y, z, r) = \frac{1}{2}(\varrho + r)^2 z. \quad (2.20)$$

Dans ce Chapitre on notera, pour alléger l'écriture, $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$ ces opérateurs. L'interaction entre molécules est modélisée par un potentiel dur. Le noyau B est dans ce cas de la forme

$$B(y, z) = b(z) y^\delta,$$

avec $\delta \in]0, 1]$. On supposera également que $b \in L^2(]-1, 1[)$. Nous allons dans ce Chapitre montrer le Théorème suivant :

Théorème 2.1 Soit $(f_{1,in}, f_{2,in}) \in (L^1_{2,r} \cap L_r \log L_r) \times (L^1_2 \cap L \log L)$ vérifiant $f_{1,in} > 0$, $f_{2,in} > 0$ p.p, et Q, R_1, R_2 les opérateurs de collisions définis par (2.5), (2.8), (2.9). Alors il existe un couple (f_1, f_2) défini sur \mathbb{R}^+ , tel que

$$(f_1, f_2) \in \text{Lip}(\mathbb{R}^+, L^1_{\gamma,r}) \times \text{Lip}(\mathbb{R}^+, L^1_\gamma)$$

pour tout $\gamma \in [0, 1]$, et vérifiant l'équation (2.4), au sens suivant : pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, pour presque tout $v \in \mathbb{R}^3$ et presque tout $r \in [r_{min}, r_{max}]$:

$$f_1(t, v, r) = f_{1,in}(v, r) + \int_0^t R_1(f_1, f_2)(s, v, r) ds, \quad (2.21)$$

$$f_2(t, v) = f_{2,in}(v) + \int_0^t (Q(f_2, f_2)(s, v) + R_2(f_1, f_2)(s, v)) ds. \quad (2.22)$$

De plus, $(f_1, f_2) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^1_{2,r} \cap L_r \log L_r \times L^1_2 \cap L \log L)$, et vérifie les estimations suivantes : pour tout $t \geq 0$, pour presque tout $r \in [r_{min}, r_{max}]$,

$$\mu(f_1)(t, r) := \mu(f_1(t, \cdot, r)) = \mu(f_{1,in}(\cdot, r)), \quad (2.23)$$

$$\mu(f_2)(t) := \mu(f_2(t, \cdot)) = \mu(f_{2,in}), \quad (2.24)$$

et

$$\mathcal{H}(f_1, f_2)(t) := \mathcal{H}(f_1(t, \cdot, \cdot), f_2(t, \cdot)) \leq \mathcal{H}(f_{1,in}, f_{2,in}), \quad (2.25)$$

où μ est l'opérateur défini par (2.2) et \mathcal{H} l'opérateur défini par (2.3). En outre, s'il existe $s > 1$ tel que $(f_{1,in}, f_{2,in}) \in L^1_{2s,r} \times L^1_{2s}$, alors il existe une solution $(f_1, f_2) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^1_{2s,r} \times L^1_{2s})$ vérifiant, en plus des propriétés précédentes, l'équation de conservation de l'énergie suivante : pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$E(f_1, f_2)(t) = E(f_{1,in}, f_{2,in}), \quad (2.26)$$

où E est l'opérateur énergie, défini par :

$$E(f_1, f_2)(t) := \varepsilon_m \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) |v|^2 dv + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, v, r) |v|^2 \left(\frac{r}{r_{min}} \right)^3 dr dv.$$

La preuve de ce Théorème, inspirée en partie par la preuve donnée par Arkeryd pour l'équation de Boltzmann spatialement homogène [Ar], est divisée en plusieurs étapes.

- ▷ Nous commençons, dans la section 2.3, par introduire des opérateurs R_1^n, R_2^n et Q^n à sections de collision tronquées et nous prouvons que le problème (2.4) associé à ces opérateurs de collisions admet pour tout $n \in \mathbb{N}$ une unique solution

$$(f_1^n, f_2^n) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^3 \times [r_{min}, r_{max}]) \times L^1(\mathbb{R}^3)).$$

Nous montrons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la solution (f_1^n, f_2^n) est positive, appartient à l'espace

$$L^\infty(\mathbb{R}^+, L^1_{2,r} \times L^1_2 \cap L_r \log L_r \times L \log L),$$

et vérifie des relations de conservations de la masse, de l'énergie et de décroissance de l'entropie.

- ▷ Nous montrons ensuite dans la section 2.4 qu'il est possible d'extraire de la suite $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite (encore notée $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$) convergeant faiblement dans $L_{t,\gamma,r}^1 \times L_{t,\gamma}^1$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\gamma < 2$ vers un couple (f_1, f_2) , puis que les opérateurs $R_1^n(f_1^n, f_2^n)$, $R_2^n(f_1^n, f_2^n)$, $Q^n(f_2^n, f_2^n)$ convergent faiblement vers $R_1(f_1, f_2)$, $R_2(f_1, f_2)$, et $Q(f_2, f_2)$ respectivement. On en déduit que (f_1, f_2) satisfait les relations (2.21)–(2.22).
- ▷ Nous montrons l'inégalité d'entropie (2.25) dans la section 2.5. Nous prouvons préalablement que pour tout $T > 0$, on peut extraire une sous-suite de $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, encore notée $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, telle que pour tout $t \in [0, T]$, $(f_1^n(t, \cdot, \cdot), f_2^n(t, \cdot, \cdot))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge faiblement dans $L_{\gamma,r}^1 \times L_{\gamma}^1$.
- ▷ Finalement, nous montrons dans la section 2.6, grâce à une inégalité due à Povzner [Po], que sous l'hypothèse d'existence d'un moment d'ordre strictement supérieur à 2 pour $(f_{1,in}, f_{2,in})$, la suite $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L_{t,2,r}^1 \times L_{t,2}^1$ (à extractions près). Ceci nous permet d'obtenir la relation (2.26).

2.3 Existence d'une solution pour le système avec sections de collisions tronquées

2.3.1 Opérateurs de collisions à sections tronquées

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les sections de collision tronquées

$$B^n(|\xi|, |\sigma \cdot \xi|) = \min \left\{ b \left(\frac{\xi \cdot \sigma}{|\xi|} \right) |\xi|^\delta, \frac{n}{4\pi} \right\},$$

et

$$q^n(|\xi|, |\omega \cdot \xi|, r) = \min \left\{ \frac{1}{2}(\varrho + r)^2 |\omega \cdot \xi|, \frac{n}{4\pi} \right\},$$

ainsi que les opérateurs de collisions à noyaux tronqués, définis par :

$$Q^n(h, l)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [h(v')l(v'_*) - h(v)l(v_*)] B^n(|v - v_*|, |\sigma \cdot (v - v_*)|) d\sigma dv_*, \quad (2.27)$$

$$R_1^n(k, h)(v, r) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [k(v', r)h(v'_2) - h(v_2)k(v, r)] q^n(|v - v_2|, |\omega \cdot (v - v_2)|, r) d\omega dv_2, \quad (2.28)$$

$$R_2^n(k, h)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [k(v'_1, r)h(v') - h(v)k(v_1, r)] q^n(|v - v_1|, |\omega \cdot (v - v_1)|, r) dr d\omega dv_1. \quad (2.29)$$

Nous commençons par établir des estimations sur les opérateurs Q^n , R_1^n et R_2^n , prouvant que ceux-ci envoient $L_2^1 \times L_2^1$ dans L_2^1 (dans le cas de Q^n), $L_2^1 \times L_{2,r}^1$ dans L_2^1 (dans le cas de R_2^n), ou $L_2^1 \times L_{2,r}^1$ dans $L_{2,r}^1$ (dans le cas de R_1^n).

Lemme 2.1 *Soient $h \in L_2^1$, $l \in L_2^1$ et $k \in L_{2,r}^1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les majorations suivantes :*

$$\|Q^n(h, l)\|_{L_2^1} \leq 2n \|h\|_{L_2^1} \|l\|_{L_2^1}, \quad (2.30)$$

$$\|R_2^n(k, h)\|_{L_2^1} \leq \left(2 + \frac{1}{\varepsilon_m} \left(\frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^3 \right) n \|h\|_{L_2^1} \|k\|_{L_{2,r}^1}, \quad (2.31)$$

et

$$\|R_1^n(k, h)\|_{L_{2,r}^1} \leq (2 + \varepsilon_m) n \|h\|_{L_2^1} \|k\|_{L_{2,r}^1}. \quad (2.32)$$

Preuve du Lemme 2.1. En utilisant le caractère involutif de l'application $(v, v_*) \rightarrow (v', v'_*)$ et la relation

$$|v'|^2 \leq |v_*|^2 + |v|^2, \quad (2.33)$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} |Q^n(h, l)|(v)(1 + |v|^2) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} (1 + |v|^2) |h(v')l(v'_*) - h(v)l(v_*)| B^n(|v - v_*|, |\sigma \cdot (v - v_*)|) d\sigma dv_* dv \\ &\leq \frac{n}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} (2 + |v|^2 + |v'|^2) |h(v)l(v_*)| d\sigma dv_* dv \\ &\leq \frac{n}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} (2 + 2|v|^2 + |v_*|^2) |h(v)l(v_*)| d\sigma dv_* dv \text{ d'après (2.33)} \\ &\leq 2n \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v_*|^2)(1 + |v|^2) |h(v)||l(v_*)| dv_* dv, \end{aligned}$$

et on obtient donc (2.30). La relation (2.13) et la décroissance de $r \mapsto \varepsilon(r)$ entraîne ensuite les deux relations suivantes :

$$|v'_2|^2 \leq |v_2|^2 + \frac{1}{\varepsilon(r)} |v_1|^2 \leq |v_2|^2 + \frac{1}{\varepsilon_m} \left(\frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^3 |v_1|^2, \quad (2.34)$$

et

$$|v'_1|^2 \leq |v_1|^2 + \varepsilon(r) |v_2|^2 \leq |v_1|^2 + \varepsilon_m |v_2|^2. \quad (2.35)$$

On obtient donc, grâce au caractère involutif de la transformation $(v_1, v_2) \rightarrow (v'_1, v'_2)$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} |R_2^n(k, h)(v_2)|(1 + |v_2|^2) dv \\ &\leq \frac{n}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} (1 + |v_2|^2) |k(v'_1, r)h(v'_2) - h(v_2)k(v_1, r)| dr d\sigma dv_1 dv_2 \\ &\leq n \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} (2 + |v_2|^2 + |v'_2|^2) |k(v_1, r)h(v_2)| dr dv_1 dv_2 \\ &\leq n \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left(2 + 2|v_2|^2 + \frac{1}{\varepsilon(r_{max})} |v_1|^2 \right) |k(v_1, r)||h(v_2)| dr dv_1 dv_2 \text{ d'après (2.34)} \\ &\leq n \left(2 + \frac{1}{\varepsilon_m} \left(\frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^3 \right) \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} (1 + |v_2|^2) (1 + |v_1|^2) |k(v_1, r)||h(v_2)| dr dv_1 dv_2, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (2.31), et ensuite

$$\begin{aligned}
& \|R_1^n(k, h)\|_{L_{2,r}^1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} |R_1^n(h, k)(v, r)| (1 + |v|^2) dr dv \\
&\leq \frac{n}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left(2 + 2|v_1'|^2 + |v_1|^2\right) |k(v_1, r)h(v_2)| dr dv_2 dv_1 \\
&\leq \frac{n}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left(2 + 2|v_1|^2 + \varepsilon_m |v_2|^2\right) |k(v_1, r)h(v_2)| dr dv_2 dv_1 \text{ d'après (2.35)} \\
&\leq (2 + \varepsilon_m) n \|h\|_{L_2^1} \|k\|_{L_{2,r}^1},
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit (2.32). \diamond

2.3.2 Existence de solutions approchées (f_1^n, f_2^n)

Nous introduisons maintenant l'approximation suivante du couple d'équations (2.4) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1^n}{\partial t} = \frac{R_1^n(f_1^n, f_2^n)}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c}, \\ \frac{\partial f_2^n}{\partial t} = \frac{Q^n(f_2^n, f_2^n) + R_2^n(f_1^n, f_2^n)}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c}, \end{cases} \quad (2.36)$$

où $\|(f_1^n, f_2^n)\|_c(t) := \|(f_1^n(t, \cdot, \cdot), f_2^n(t, \cdot, \cdot))\|_c$ est défini par (2.1), Q^n , R_1^n et R_2^n sont les opérateurs à sections tronquées définis par (2.27), (2.28) et (2.29), de conditions initiales

$$f_1^n(0, \cdot, \cdot) = f_{1,in}(v, r) \mathbb{1}_{\{f_{1,in} \leq n\}}(v, r) + \frac{1}{n} \exp(-|v|^2), \quad (2.37)$$

$$f_2^n(0, \cdot) = f_{2,in}(v) \mathbb{1}_{\{f_{2,in} \leq n\}}(v) + \frac{1}{n} \exp(-|v|^2). \quad (2.38)$$

Afin de montrer l'existence d'une solution (f_1^n, f_2^n) à (2.36) – (2.37) – (2.38) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'application ϕ_n définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ de la façon suivante :

$$\phi_n : (\psi, \varphi) \in L_{2,r}^1 \times L_2^1 \mapsto \left(\frac{R_1^n(\psi, \varphi)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi, \varphi)\|_c}, \frac{Q^n(\varphi, \varphi) + R_2^n(\psi, \varphi)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi, \varphi)\|_c} \right).$$

Proposition 2.1 *L'application $\phi_n : (\psi, \varphi) \in L_{2,r}^1 \times L_2^1 \rightarrow L_{2,r}^1 \times L_2^1$ est globalement lipschitzienne : il existe une constante K ne dépendant que de n , ε_m , r_{\min} et r_{\max} telle que pour tous couples $(\psi_1, \varphi_1) \in L_{2,r}^1 \times L_2^1$, $(\psi_2, \varphi_2) \in L_{2,r}^1 \times L_2^1$:*

$$\|\phi_n(\psi_2, \varphi_2) - \phi_n(\psi_1, \varphi_1)\|_c \leq K \|(\psi_2, \varphi_2) - (\psi_1, \varphi_1)\|_c. \quad (2.39)$$

Preuve de la Proposition 2.1. Pour $(\psi, \varphi) \in L_{2,r}^1 \times L_2^1$, on note

$$\phi_n^1(\psi, \varphi) = \frac{R_1^n(\psi, \varphi)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi, \varphi)\|_c},$$

et

$$\phi_n^2(\psi, \varphi) = \frac{Q^n(\varphi, \varphi) + R_2^n(\psi, \varphi)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi, \varphi)\|_c}.$$

▷ Montrons que $Im(\phi_n^2) \subset L_2^1$ et que

$$\begin{aligned} & \|\phi_n^2(\psi_2, \varphi_2) - \phi_n^2(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_2^1} \\ & \leq n^2 \left[6 + \varepsilon_m + \frac{1}{\varepsilon_m} \left(\frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^3 \right] \|\psi_2 - \psi_1\|_{L_{2,r}^1} + n^2 \left(10 + \frac{2}{\varepsilon_m} \left(\frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^3 \right) \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{L_2^1}. \end{aligned}$$

On commence par faire le découpage suivant :

$$\begin{aligned} & \|\phi_n^2(\psi_2, \varphi_2) - \phi_n^2(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_2^1} \\ & \leq \|\phi_n^2(\psi_2, \varphi_2) - \phi_n^2(\psi_1, \varphi_2)\|_{L_2^1} + \|\phi_n^2(\psi_1, \varphi_2) - \phi_n^2(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_2^1}. \end{aligned}$$

On a d'une part :

$$\begin{aligned} & \|\phi_n^2(\psi_2, \varphi_2) - \phi_n^2(\psi_1, \varphi_2)\|_{L_2^1}^2 \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{Q^n(\varphi_2, \varphi_2)(v) + R_2^n(\psi_2, \varphi_2)(v)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_2, \varphi_2)\|_c} - \frac{Q^n(\varphi_2, \varphi_2)(v) + R_2^n(\psi_1, \varphi_2)(v)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} \right| (1 + |v|^2) dv \\ & \leq \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_2, \varphi_2)\|_c} - \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} \right| \int_{\mathbb{R}^3} |Q^n(\varphi_2, \varphi_2)(v)| (1 + |v|^2) dv \\ & \quad + \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_2, \varphi_2)\|_c} - \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} \right| \int_{\mathbb{R}^3} |R_2^n(\psi_2, \varphi_2)(v)| (1 + |v|^2) dv \\ & \quad + \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} \int_{\mathbb{R}^3} |R_2^n(\psi_2 - \psi_1, \varphi_2)(v)| (1 + |v|^2) dv, \end{aligned}$$

d'où, d'après (2.30) et (2.31),

$$\begin{aligned} & \|\phi_n^2(\psi_2, \varphi_2) - \phi_n^2(\psi_1, \varphi_2)\|_{L_2^1}^2 \\ & \leq \frac{1}{n} \frac{|\|\psi_1\|_{L_{2,r}^1} - \|\psi_2\|_{L_{2,r}^1}|}{\left[1 + \frac{1}{n} \|\varphi_2\|_{L_2^1} + \frac{1}{n} \|\psi_2\|_{L_{2,r}^1} \right] \left[1 + \frac{1}{n} \|\varphi_2\|_{L_2^1} \right]} \\ & \quad \times n \left[2\|\varphi_2\|_{L_2^1}^2 + \left(2 + \frac{1}{\varepsilon_m} \left(\frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^3 \right) \|\varphi_2\|_{L_2^1} \|\psi_2\|_{L_{2,r}^1} \right] \\ & \quad + \frac{(2 + \varepsilon_m) n}{\left[1 + \frac{1}{n} \|\varphi_2\|_{L_2^1} \right]} \|\varphi_2\|_{L_2^1} \|\psi_2 - \psi_1\|_{L_{2,r}^1} \\ & \leq n^2 \left(6 + \varepsilon_m + \frac{1}{\varepsilon_m} \left(\frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^3 \right) \|\psi_2 - \psi_1\|_{L_{2,r}^1}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \|\phi_n^2(\psi_1, \varphi_2) - \phi_n^2(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_2^1}^2 \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{Q^n(\varphi_2, \varphi_2)(v) + R_2^n(\psi_1, \varphi_2)(v)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} - \frac{Q^n(\varphi_1, \varphi_1)(v) + R_2^n(\psi_1, \varphi_1)(v)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_1, \varphi_1)\|_c} \right| (1 + |v|^2) dv. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} & \frac{Q^n(\varphi_2, \varphi_2)}{1 + \frac{1}{n}\|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} - \frac{Q^n(\varphi_1, \varphi_1)}{1 + \frac{1}{n}\|(\psi_1, \varphi_1)\|_c} \\ &= \frac{Q^n(\varphi_2, \varphi_2 - \varphi_1)}{1 + \frac{1}{n}\|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} - \frac{Q^n(\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1)}{1 + \frac{1}{n}\|(\psi_1, \varphi_1)\|_c} \\ &+ Q^n(\varphi_2, \varphi_1) \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}\|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}\|(\psi_1, \varphi_1)\|_c} \right), \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} & \|\phi_n^2(\psi_1, \varphi_2) - \phi_n^2(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_2^1} \\ & \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}\|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} \|Q^n(\varphi_2, \varphi_2 - \varphi_1)\|_{L_2^1} \\ & + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}\|(\psi_1, \varphi_1)\|_c} \|Q^n(\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1)\|_{L_2^1} \\ & + \frac{\frac{1}{n} \left| \|\varphi_1\|_{L_2^1} - \|\varphi_2\|_{L_2^1} \right| \|Q^n(\varphi_2, \varphi_1)\|_{L_2^1}}{\left[1 + \frac{1}{n}\|\varphi_2\|_{L_2^1} + \frac{1}{n}\|\psi_1\|_{L_{2,r}^1} \right] \left[1 + \frac{1}{n}\|\varphi_1\|_{L_2^1} + \frac{1}{n}\|\psi_1\|_{L_{2,r}^1} \right]} \\ & + \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{n}\|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}\|(\psi_1, \varphi_1)\|_c} \right| \|R_2^n(\psi_1, \varphi_2)\|_{L_2^1} \\ & + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}\|(\psi_1, \varphi_1)\|_c} \|R_2^n(\psi_1, \varphi_2 - \varphi_1)\|_{L_2^1}, \end{aligned}$$

d'où, d'après (2.30) et (2.31),

$$\begin{aligned} & \|\phi_n^2(\psi_1, \varphi_2) - \phi_n^2(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_2^1} \\ & \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}\|\varphi_2\|_{L_2^1}} 2n\|\varphi_2\|_{L_2^1}\|\varphi_2 - \varphi_1\|_{L_2^1} \\ & + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}\|\varphi_1\|_{L_2^1}} 2n\|\varphi_1\|_{L_2^1}\|\varphi_2 - \varphi_1\|_{L_2^1} \\ & + \frac{\frac{1}{n}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2^1}}{\left[1 + \frac{1}{n}\|\varphi_2\|_{L_2^1} \right] \left[1 + \frac{1}{n}\|\varphi_1\|_{L_2^1} \right]} 2n\|\varphi_1\|_{L_2^1}\|\varphi_2\|_{L_2^1} \\ & + \frac{\frac{1}{n}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2^1}}{\left[1 + \frac{1}{n}\|\varphi_2\|_{L_2^1} \right] \left[1 + \frac{1}{n}\|\psi_1\|_{L_{2,r}^1}^2 \right]} \left(2 + \frac{1}{\varepsilon_m} \left(\frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^3 \right) 2n\|\psi_1\|_{L_{2,r}^1}\|\varphi_2\|_{L_2^1} \\ & + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}\|\psi_1\|_{L_{2,r}^1}} \left(2 + \frac{1}{\varepsilon_m} \left(\frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^3 \right) n\|\psi_1\|_{L_{2,r}^1}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2^1} \\ & \leq n^2 \left(10 + \frac{2}{\varepsilon_m} \left(\frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^3 \right) \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{L_2^1}. \end{aligned}$$

▷ Montrons ensuite que $Im(\phi_n^1) \subset L_{2,r}^1$ et que

$$\|\phi_n^1(\psi_2, \varphi_2) - \phi_n^1(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_{2,r}^1} \leq 2(2 + \varepsilon_m)n^2 \left(\|\psi_2 - \psi_1\|_{L_{2,r}^1} + \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{L_2^1} \right).$$

On effectue de façon analogue au paragraphe précédent le découpage suivant :

$$\begin{aligned} & \|\phi_n^1(\psi_2, \varphi_2) - \phi_n^1(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_{2,r}^1} \\ & \leq \|\phi_n^1(\psi_2, \varphi_2) - \phi_n^1(\psi_1, \varphi_2)\|_{L_{2,r}^1} + \|\phi_n^1(\psi_1, \varphi_2) - \phi_n^1(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_{2,r}^1}. \end{aligned}$$

On a d'une part

$$\begin{aligned} & \|\phi_n^1(\psi_2, \varphi_2) - \phi_n^1(\psi_1, \varphi_2)\|_{L_{2,r}^1} \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left| \frac{R_1^n(\psi_2, \varphi_2)(v, r)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_2, \varphi_2)\|_c} - \frac{R_1^n(\psi_1, \varphi_2)(v, r)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} \right| (1 + |v|^2) dr dv \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_2, \varphi_2)\|_c} |R_1^n(\psi_2 - \psi_1, \varphi_2)(v, r)| (1 + |v|^2) dr dv \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left| \frac{R_1^n(\psi_1, \varphi_2)(v, r)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_2, \varphi_2)\|_c} - \frac{R_1^n(\psi_1, \varphi_2)(v, r)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} \right| (1 + |v|^2) dr dv, \end{aligned}$$

soit, d'après l'inégalité (2.32),

$$\begin{aligned} & \|\phi_n^1(\psi_2, \varphi_2) - \phi_n^1(\psi_1, \varphi_2)\|_{L_{2,r}^1} \\ & \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|\varphi_2\|_{L_2^1}} \|R_1^n(\psi_2 - \psi_1, \varphi_2)\|_{L_{2,r}^1} \\ & \quad + \frac{\frac{1}{n} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_{2,r}^1}}{\left[1 + \frac{1}{n} \|\varphi_2\|_{L_2^1}\right] \left[1 + \frac{1}{n} \|\psi_1\|_{L_{2,r}^1}\right]} \|R_1^n(\psi_1, \varphi_2)\|_{L_{2,r}^1} \\ & \leq 2n^2 (2 + \varepsilon_m) \|\psi_2 - \psi_1\|_{L_{2,r}^1}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \|\phi_n^1(\psi_1, \varphi_2) - \phi_n^1(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_{2,r}^1} \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left| \frac{R_1^n(\psi_1, \varphi_2)(v, r)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} - \frac{R_1^n(\psi_1, \varphi_1)(v, r)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_1, \varphi_1)\|_c} \right| (1 + |v|^2) dr dv \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} |R_1^n(\psi_1, \varphi_2 - \varphi_1)(v, r)| (1 + |v|^2) dr dv \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left| \frac{R_1^n(\psi_1, \varphi_1)(v, r)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_1, \varphi_2)\|_c} - \frac{R_1^n(\psi_1, \varphi_1)(v, r)}{1 + \frac{1}{n} \|(\psi_1, \varphi_1)\|_c} \right| (1 + |v|^2) dr dv, \end{aligned}$$

soit, d'après (2.32),

$$\begin{aligned} & \|\phi_n^1(\psi_1, \varphi_2) - \phi_n^1(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_{2,r}^1} \\ & \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|\psi_1\|_{L_{2,r}^1}} \|R_1^n(\psi_1, \varphi_2 - \varphi_1)\|_{L_{2,r}^1} \\ & \quad + \frac{\frac{1}{n} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2^1}}{\left[1 + \frac{1}{n} \|\varphi_1\|_{L_2^1}\right] \left[1 + \frac{1}{n} \|\psi_1\|_{L_{2,r}^1}\right]} \|R_1^n(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_{2,r}^1} \\ & \leq 2n^2 (2 + \varepsilon_m) \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{L_2^1}. \end{aligned}$$

▷ On obtient finalement

$$\begin{aligned}
& \|\phi_n(\psi_2, \varphi_2) - \phi_n(\psi_1, \varphi_1)\|_c \\
&= \|\phi_n^2(\psi_1, \varphi_2) - \phi_n^2(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_2^1} + \|\phi_n^1(\psi_1, \varphi_2) - \phi_n^1(\psi_1, \varphi_1)\|_{L_{2,r}^1} \\
&\leq n^2 \left(6 + \varepsilon_m + \frac{1}{\varepsilon_m} \left(\frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^3 \right) \|\psi_2 - \psi_1\|_{L_{2,r}^1} + n^2 \left(10 + \frac{2}{\varepsilon_m} \left(\frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^3 \right) \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{L_2^1} \\
&\quad + 2(2 + \varepsilon_m)n^2 \|\psi_2 - \psi_1\|_{L_{2,r}^1} + 2(2 + \varepsilon_m)n^2 \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{L_2^1} \\
&\leq K \|(\psi_2, \varphi_2) - (\psi_1, \varphi_1)\|_c,
\end{aligned}$$

d'où découle l'inégalité (2.39). \diamond

Le système (2.36) se met sous la forme d'un système autonome

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (f_1^n, f_2^n) = \phi_n (f_1^n(t, v), f_2^n(t, v, r)), \\ (f_1^n(0, \cdot), f_2^n(0, \cdot, \cdot)) = (h_1^n, h_2^n), \end{cases} \quad (2.40)$$

où l'on note

$$h_1^n(v, r) := f_{1,in}(v, r) \mathbf{1}_{\{f_{1,in} \leq n\}}(v, r) + \frac{1}{n} \exp(-|v|^2), \quad (2.41)$$

$$h_2^n(v) := f_{2,in}(v) \mathbf{1}_{\{f_{2,in} \leq n\}}(v) + \frac{1}{n} \exp(-|v|^2). \quad (2.42)$$

L'intérêt de se donner une donnée initiale (h_1^n, h_2^n) différente de $(f_{1,in}, f_{2,in})$ et approchant celle-ci dans la limite $n \rightarrow \infty$ apparaîtra par la suite. La Proposition 2.1 et le Théorème de Cauchy-Lipschitz global permettent alors d'obtenir la Proposition suivante :

Proposition 2.2 *Soit $(f_{1,in}, f_{2,in}) \in L_{2,r}^1 \times L_2^1$ vérifiant $f_{1,in} \geq 0$, $f_{2,in} \geq 0$ p.p. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le système (2.36) muni des conditions initiales (2.37) et (2.38) possède une unique solution*

$$(f_1^n, f_2^n) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, L_{2,r}^1 \times L_2^1). \quad (2.43)$$

2.3.3 Conservation de la masse et de l'énergie

Nous commençons par montrer les propriétés de conservation suivantes :

Proposition 2.3 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(f_{1,in}, f_{2,in}) \in L_{2,r}^1 \times L_2^1$ vérifiant $f_{1,in} \geq 0$, $f_{2,in} \geq 0$ p.p., et (f_1^n, f_2^n) la solution du système (2.40). Alors pour tout $t \geq 0$, pour presque tout $r \in [r_{min}, r_{max}]$,*

$$\mu(f_1^n)(t, r) = \mu(h_1^n)(r), \quad (2.44)$$

$$\mu(f_2^n)(t) = \mu(h_2^n), \quad (2.45)$$

et

$$E(f_1^n, f_2^n)(t) = E(h_1^n, h_2^n), \quad (2.46)$$

h_1^n et h_2^n étant définies par (2.41) et (2.42). De plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(h_2^n) = \mu(f_{2,in}), \quad (2.47)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(h_1^n, h_2^n) = E(f_{1,in}, f_{2,in}), \quad (2.48)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu(h_1^n) - \mu(f_{1,in})\|_{L^1([r_{min}, r_{max}])} = 0. \quad (2.49)$$

Preuve de la Proposition 2.3. On déduit immédiatement de (2.43) et du Lemme 2.1 que $R_1^n(f_1^n, f_2^n)(t, \cdot, \cdot) \in L_{2,r}^1$, $R_2^n(f_1^n, f_2^n)(t, \cdot) \in L_2^1$ et $Q^n(f_2^n, f_2^n)(t, \cdot) \in L_2^1$ pour tout $t \geq 0$. Comme $v \mapsto 1$ est un invariant collisionnel des opérateurs $R_1^n(f_1^n, f_2^n)$ et $R_2^n(f_1^n, f_2^n)$, on a alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} f_1^n(t, v, r) dv = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)(t)\|_c} \int_{\mathbb{R}^3} R_1^n(f_1^n, f_2^n)(t, v, r) dv = 0,$$

d'où l'on déduit la relation (2.44) ; on obtient la première égalité de la relation (2.45) de la même façon. De plus, puisque $(f_1^n, f_2^n) \in C^1(\mathbb{R}^+, L_{2,r}^1 \times L_2^1)$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_m \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(t, v) |v|^2 dv + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1^n(t, v, r) |v|^2 \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^3 dr dv \right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c(t)} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left(\varepsilon_m R_2^n(f_1^n, f_2^n)(t, v) + \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^3 R_1^n(f_1^n, f_2^n)(t, v, r) dr \right) dv \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

la relation (2.18) étant valable pour les opérateurs de collision à sections tronquées. Par ailleurs, comme $f_{2,in} \in L^1(\mathbb{R}^3)$

$$\mu(h_2^n) - \mu(f_{2,in}) = \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) \mathbb{1}_{\{f_{2,in} \leq n\}}(v) dv - \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) dv + \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-|v|^2) dv$$

tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ par convergence dominée. De même, comme $(f_{1,in}, f_{2,in}) \in L_{2,r}^1 \times L_2^1$,

$$\begin{aligned} & |E(h_1^n, h_2^n) - E(f_{1,in}, f_{2,in})| \\ & \leq \varepsilon_m \left| \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) \mathbb{1}_{\{f_{2,in} \leq n\}} |v|^2 dv - \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) |v|^2 dv \right| \\ & \quad + \left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}} \right)^3 \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_{1,in}(t, v, r) \mathbb{1}_{\{f_{1,in} \leq n\}} |v|^2 dr dv - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_{1,in}(t, v, r) |v|^2 dr dv \right| \\ & \quad + \frac{1}{n} (1 + r_{\max} - r_{\min}) \pi^{3/2}, \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir (2.48) par convergence dominée. Enfin, puisque

$$\begin{aligned} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} |\mu(h_1^n)(r) - \mu(f_{1,in})(r)| dr & \leq \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_{\mathbb{R}^3} |f_{1,in}(v, r)| (1 - \mathbb{1}_{\{f_{1,in} \leq n\}}) dr dv \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^3} f_{1,in}(v, r) dv dr + \frac{1}{n} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-|v|^2) dv dr, \end{aligned}$$

alors $\mu(h_1^n)$ tend vers $\mu(f_{1,in})$ dans $L^1([r_{\min}, r_{\max}])$ lorsque $n \rightarrow \infty$. \diamond

2.3.4 Propagation de la positivité

Proposition 2.4 *On suppose que $f_{1,in} \geq 0$, $f_{2,in} \geq 0$ p.p. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la solution de (2.36) munie des conditions initiales (2.37) et (2.38) vérifie : pour tout $t > 0$, pour presque tout $v \in \mathbb{R}^3$ et presque tout $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$, $f_1^n(t, v, r) \geq 0$ et $f_2^n(t, v) \geq 0$.*

Preuve de la Proposition 2.4. Nous introduisons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial t} + \mu_1 g_1 = \Gamma_1^n(g_1, g_2), \\ \frac{\partial g_2}{\partial t} + \mu_2 g_2 = \Gamma_2^n(g_1, g_2), \end{cases} \quad (2.50)$$

de conditions initiales

$$g_1(0, v, r) = h_1^n(v, r), \quad g_2(0, v) = h_2^n(v), \quad (2.51)$$

et d'inconnues $g_1 : (t, v, r) \mapsto g_1(t, v, r) \in \mathbb{R}$ et $g_2 : (t, v) \mapsto g_2(t, v) \in \mathbb{R}$, où Γ_1^n et Γ_2^n sont des opérateurs définis par

$$\Gamma_1^n(g_1, g_2) = \frac{R_1^n(g_1, g_2)}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c} + \mu_1 g_1 \frac{\int_{\mathbb{R}^3} g_2(t, v_2) dv_2}{\int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(t, v_2) dv_2},$$

et

$$\begin{aligned} & \Gamma_2^n(g_1, g_2) \\ &= \frac{Q^n(g_2, g_2) + R_2^n(g_1, g_2)}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c} + \frac{\mu_2 g_2}{2} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} g_1(t, v_1, r) dr dv_1}{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} h_1^n(v_1, r) dr dv_1} + \frac{\int_{\mathbb{R}^3} g_2(t, v_2) dv_2}{\int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v_2) dv_2} \right), \end{aligned}$$

où μ_1 et μ_2 sont des constantes qui seront précisées par la suite. D'après (2.44) et (2.45), il est clair que (f_1^n, f_2^n) est solution de (2.50), quelques soient les constantes μ_1 et μ_2 . De plus, l'application

$$(g_1, g_2) \rightarrow (\Gamma_1^n(g_1, g_2) - \mu_1 g_1, \Gamma_2^n(g_1, g_2) - \mu_2 g_2)$$

étant localement lipschitzienne, le Théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que cette solution est unique. Il suffit donc de montrer que pour tout $T > 0$, la solution (g_1, g_2) du problème (2.50)–(2.51) est positive sur $[0, T]$ pour obtenir la positivité (presque partout en v et r) de (f_1^n, f_2^n) . Soit $T > 0$. Introduisons les suites $(g_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(g_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} g_{1,k+1}(t, v, r) = \exp(-\mu_1 t) h_1^n(v, r) + \int_0^t \exp(-\mu_1(t-s)) \Gamma_1^n(g_{1,k}, g_{2,k})(s, v, r) ds, \\ g_{1,0} = 0, \end{cases} \quad (2.52)$$

et

$$\begin{cases} g_{2,k+1}(t, v) = \exp(-\mu_2 t) h_2^n(v) + \int_0^t \exp(-\mu_2(t-s)) \Gamma_2^n(g_{1,k}, g_{2,k})(s, v) ds, \\ g_{2,0} = 0, \end{cases} \quad (2.53)$$

et montrons par récurrence que ces deux suites sont croissantes. L'initialisation est immédiate car h_1^n et h_2^n sont positives. Il suffit ensuite de montrer que pour tout $k \geq 1$

$$\begin{cases} 0 \leq g_{1,k-1} \leq g_{1,k} \\ 0 \leq g_{2,k-1} \leq g_{2,k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_1^n(g_{1,k-1}, g_{2,k-1}) \leq \Gamma_1^n(g_{1,k}, g_{2,k}) \\ \Gamma_2^n(g_{1,k-1}, g_{2,k-1}) \leq \Gamma_2^n(g_{1,k}, g_{2,k}) \end{cases}.$$

On a, pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
& \Gamma_1^n(g_{1,k}, g_{2,k}) - \Gamma_1^n(g_{1,k-1}, g_{2,k-1}) \\
&= \frac{R_1^n(g_{1,k}, g_{2,k}) - R_1^n(g_{1,k-1}, g_{2,k-1})}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c} \\
&+ \frac{\mu_1}{\int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v_2) dv_2} \left[g_{1,k} \int_{\mathbb{R}^3} g_{2,k}(\cdot, v_2) dv_2 - g_{1,k-1} \int_{\mathbb{R}^3} g_{2,k-1}(\cdot, v_2) dv_2 \right] \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c} [R_1^n(g_{1,k} - g_{1,k-1}, g_{2,k}) + R_1^n(g_{1,k-1}, g_{2,k} - g_{2,k-1})] \\
&+ \frac{\mu_1}{\int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v_2) dv_2} \left[(g_{1,k} - g_{1,k-1}) \int_{\mathbb{R}^3} g_{2,k}(\cdot, v_2) dv_2 + g_{1,k-1} \int_{\mathbb{R}^3} (g_{2,k}(\cdot, v_2) - g_{2,k-1}(\cdot, v_2)) dv_2 \right].
\end{aligned}$$

Or, pour toutes fonctions ψ et φ positives p.p, l'opérateur $R_1^n(\psi, \varphi)$ peut être minoré par

$$R_1^n(\psi, \varphi) \geq -n\psi \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v_2) dv_2. \quad (2.54)$$

Ainsi, en supposant $0 \leq g_{1,k-1} \leq g_{1,k}$ et $0 \leq g_{2,k-1} \leq g_{2,k}$, on obtient, pour tout $t \in [0, T]$ et presque tout $v \in \mathbb{R}^3$ et $r \in [r_{min}, r_{max}]$:

$$\begin{aligned}
& \Gamma_1^n(g_{1,k}, g_{2,k})(t, v, r) - \Gamma_1^n(g_{1,k-1}, g_{2,k-1})(t, v, r) \\
& \geq \left(-\frac{n^2}{n + \|(f_1^n, f_2^n)\|_c(t)} + \frac{\mu_1}{\int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v_2) dv_2} \right) \\
& \quad \times \left((g_{1,k} - g_{1,k-1})(t, v, r) \int_{\mathbb{R}^3} g_{2,k}(t, v_2) dv_2 + g_{1,k-1}(t, v, r) \int_{\mathbb{R}^3} (g_{2,k} - g_{2,k-1})(t, v_2) dv_2 \right).
\end{aligned}$$

Comme $(f_1^n, f_2^n) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, L_{2,r} \times L_2)$, on peut introduire

$$C_n := \sup_{t \in [0, T]} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c(t),$$

et il suffit alors de choisir de choisir μ_1 tel que

$$\mu_1 \geq \frac{n^2 \int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v_2) dv_2}{n + C_n},$$

(n étant fixé) pour obtenir :

$$\Gamma_1^n(g_{1,k-1}, g_{2,k-1}) \leq \Gamma_1^n(g_{1,k}, g_{2,k}).$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
& \Gamma_2^n(g_{1,k}, g_{2,k}) - \Gamma_2^n(g_{1,k-1}, g_{2,k-1}) \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \| (f_1^n, f_2^n) \|_c} (Q^n(g_{2,k}, g_{2,k}) - Q^n(g_{2,k-1}, g_{2,k-1})) \\
&+ \frac{\mu_2}{2 \int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v_2) dv_2} \left(g_{2,k} \int_{\mathbb{R}^3} g_{2,k}(\cdot, v_2) dv_2 - g_{2,k-1} \int_{\mathbb{R}^3} g_{2,k-1}(\cdot, v_2) dv_2 \right) \\
&+ \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \| (f_1^n, f_2^n) \|_c} (R_2^n(g_{1,k}, g_{2,k}) - R_2^n(g_{1,k-1}, g_{2,k-1})) \\
&+ \frac{\mu_2}{2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} h_1^n(v_1, r) dr dv_1} \\
&\times \left(g_{2,k} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} g_{1,k}(\cdot, v_1, r) dr dv_1 - g_{2,k-1} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} g_{1,k-1}(\cdot, v_1, r) dr dv_1 \right),
\end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
& \Gamma_2^n(g_{1,k}, g_{2,k}) - \Gamma_2^n(g_{1,k-1}, g_{2,k-1}) \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \| (f_1^n, f_2^n) \|_c} (Q^n(g_{2,k} - g_{2,k-1}, g_{2,k}) + Q^n(g_{2,k-1}, g_{2,k} - g_{2,k-1})) \\
&+ \frac{\mu_2}{2 \int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v_2) dv_2} \left((g_{2,k} - g_{2,k-1}) \int_{\mathbb{R}^3} g_{2,k}(\cdot, v_2) dv_2 + g_{2,k-1} \int_{\mathbb{R}^3} (g_{2,k}(\cdot, v_2) - g_{2,k-1}(\cdot, v_2)) dv_2 \right) \\
&+ \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \| (f_1^n, f_2^n) \|_c} (R_2^n(g_{1,k}, g_{2,k} - g_{2,k-1}) + R_2^n(g_{1,k} - g_{1,k-1}, g_{2,k-1})) \\
&+ \frac{\mu_2}{2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} h_1^n(v_1, r) dr dv_1} \left((g_{2,k} - g_{2,k-1}) \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} g_{1,k}(\cdot, v_1, r) dr dv_1 \right. \\
&\left. + g_{2,k-1} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} (g_{1,k}(\cdot, v_1, r) - g_{1,k-1}(\cdot, v_1, r)) dr dv_1 \right).
\end{aligned}$$

De plus, comme pour toutes fonctions ψ , φ et φ_2 positives p.p, les opérateurs $R_2^n(\psi, \varphi)$ et $Q^n(\varphi, \varphi_2)$ peuvent être minorés par

$$R_2^n(\psi, \varphi) \geq -n \varphi \int_{\mathbb{R}^3} \psi(v_1) dv_1, \quad (2.55)$$

et

$$Q^n(\varphi, \varphi_2) \geq -n \varphi \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_2(v_2) dv_2, \quad (2.56)$$

alors

$$\begin{aligned}
& \Gamma_2^n(g_{1,k}, g_{2,k}) - \Gamma_2^n(g_{1,k-1}, g_{2,k-1}) \\
& \geq \left(-\frac{n^2}{n + \|(f_1^n, f_2^n)\|_c} + \frac{\mu_2}{2 \int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v_2) dv_2} \right) \\
& \quad \times \left((g_{2,k} - g_{2,k-1}) \int_{\mathbb{R}^3} g_{2,k}(\cdot, v_2) dv_2 + g_{2,k-1} \int_{\mathbb{R}^3} (g_{2,k} - g_{2,k-1})(\cdot, v_2) dv_2 \right) \\
& \quad + \left(-\frac{n^2}{n + \|(f_1^n, f_2^n)\|_c} + \frac{\mu_2}{2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} h_1^n(v_1, r) dr dv_1} \right) \\
& \quad \times \left((g_{2,k} - g_{2,k-1}) \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} g_{1,k}(\cdot, v_1, r) dr dv_1 + g_{2,k-1} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} (g_{1,k} - g_{1,k-1})(\cdot, v_1, r) dr dv_1 \right).
\end{aligned}$$

Ainsi pour

$$\mu_2 \geq \max \left(\frac{2n^2 \int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v_2) dv_2}{n + C_n}, \frac{2n^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} h_1^n(v_1, r) dr dv_1}{n + C_n} \right),$$

on obtient, sous les hypothèses $0 \leq g_{1,k-1} \leq g_{1,k}$ et $0 \leq g_{2,k-1} \leq g_{2,k}$, que

$$\Gamma_2^n(g_{1,k-1}, g_{2,k-1}) \leq \Gamma_2^n(g_{1,k}, g_{2,k}).$$

Les suites $(g_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(g_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$ sont donc croissantes. Par ailleurs, $v \mapsto 1$ étant un invariant collisionnel de $R_1^n(f_1^n, f_2^n)$, $R_2^n(f_1^n, f_2^n)$ et $Q^n(f_1^n, f_2^n)$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} g_{1,k+1}(t, v_1, r) dr dv_1 \\
& = \exp(-\mu_1 t) \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} h_1^n(v_1, r) dr dv_1 \\
& + \frac{\mu_1}{\int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v_2) dv_2} \int_0^t \exp(-\mu_1(t-s)) \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} g_{1,k}(s, v_1, r) dr dv_1 \int_{\mathbb{R}^3} g_{2,k}(s, v_2) dv_2 ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} g_{2,k+1}(t, v_2) dv_2 \\
& = \exp(-\mu_2 t) \int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v_2) dv_2 + \frac{\mu_2}{2} \int_0^t \exp(-\mu_2(t-s)) \\
& \quad \times \int_{\mathbb{R}^3} g_{2,k}(s, v_2) dv_2 \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} g_{1,k}(s, v_1, r) dr dv_1}{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} h_1^n(v_1, r) dr dv_1} + \frac{\int_{\mathbb{R}^3} g_{2,k}(s, v_2) dv_2}{\int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v_2) dv_2} \right) ds,
\end{aligned}$$

qui permettent obtenir par récurrence que

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} g_{1,k}(t, v_1, r) dr dv_1 \leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} h_1^n(v_1, r) dr dv_1,$$

et

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^3} g_{2,k}(t, v_2) dv_2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v_2) dv_2.$$

On peut donc appliquer le Théorème de convergence monotone, qui nous assure que

$$\overline{g_1} = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{1,k}$$

et

$$\overline{g_2} = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{2,k}$$

existent, sont positives, et que

$$(\overline{g_1}, \overline{g_2}) \in L^\infty([0, T], L^1(\mathbb{R}^3) \times L^1(\mathbb{R}^3 \times [r_{\min}, r_{\max}])).$$

De plus, d'après (2.52) et (2.53), on voit que $(\overline{g_1}, \overline{g_2})$ est la solution de (2.50), et par unicité on en déduit que $g_1 = \overline{g_1}$ et $g_2 = \overline{g_2}$ (pour tout $t \in [0, T]$, et pour presque tout $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$, $v \in \mathbb{R}^3$). Ainsi on a bien montré la positivité de f_1^n et f_2^n . \diamond

On peut maintenant déduire des relations (2.44), (2.45) et (2.46) que

$$M_1 := \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1^n(t, v, r) (1 + |v|^2) dr dv < \infty, \quad (2.57)$$

et

$$M_2 := \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(t, v) (1 + |v|^2) dv < \infty. \quad (2.58)$$

2.3.5 Décroissance de l'entropie

Proposition 2.5 *Soit $(f_{1,in}, f_{2,in}) \in (L_{2,r}^1 \cap L_r \log L_r) \times (L_2^1 \cap L \log L)$ vérifiant $f_{1,in} \geq 0$, $f_{2,in} \geq 0$ p.p., et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (f_1^n, f_2^n) la solution du système (2.40). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \geq 0$,*

$$(f_1^n, f_2^n) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L_r \log L_r \times L \log L), \quad (2.59)$$

et l'entropie est décroissante : pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathcal{H}(f_1^n, f_2^n)(t) \leq \mathcal{H}(f_1^n, f_2^n)(s). \quad (2.60)$$

De plus, il existe une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ et pour tout $t \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{H}(f_1^n, f_2^n)(t) \leq \mathcal{H}(f_{1,in}, f_{2,in}) + u_n. \quad (2.61)$$

Preuve de la Proposition 2.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

▷ Commençons par montrer que $t \mapsto \mathcal{H}(f_1^n, f_2^n)(t)$ est bien définie. Il nous faut pour cela obtenir des bornes sur f_1^n et f_2^n . Plus précisément, nous montrons que ces densités sont bornées inférieurement (afin de pouvoir contrôler $\ln(f_1^n)$ et $\ln(f_2^n)$) et supérieurement. D'après l'inégalité (2.54) et grâce à la positivité de f_1^n et f_2^n , l'opérateur $R_1^n(f_1^n, f_2^n)$ vérifie la propriété suivante :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c} R_1^n(f_1^n, f_2^n) \geq -n^2 f_1^n.$$

Ainsi f_1^n vérifie, d'après (2.37),

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1^n}{\partial t} + n^2 f_1^n \geq 0, \\ f_1^n(0, \cdot, \cdot) \geq \frac{1}{n} \exp(-|v|^2), \end{cases}$$

et on peut en déduire que f_1^n admet la borne inférieure suivante : pour tout $t \geq 0$, pour tout $v \in \mathbb{R}^3$ et tout $r \in [r_{min}, r_{max}]$,

$$f_1^n(t, v, r) \geq \frac{1}{n} \exp(-|v|^2) \exp(-n^2 t). \quad (2.62)$$

L'intérêt de "relever" la donnée initiale en ajoutant à $f_{1,in}$ un terme strictement positif nous apparaît donc ici clairement. De la même façon, et grâce aux inégalités (2.55) et (2.56), on obtient que pour tout $t \geq 0$ et pour tout $v \in \mathbb{R}^3$,

$$f_2^n(t, v) \geq \frac{1}{n} \exp(-|v|^2) \exp(-2n^2 t). \quad (2.63)$$

Par ailleurs, l'opérateur de collision $R_1^n(f_1^n, f_2^n)$ vérifie l'estimation suivante :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c} \|R_1^n(f_1^n, f_2^n)(t, \cdot, \cdot)\|_\infty \leq n^2 \|f_1^n(t, \cdot, \cdot)\|_\infty,$$

qui nous permet d'obtenir, d'après (2.36),

$$\|f_1^n(t, \cdot, \cdot)\|_\infty \leq \|h_1^n\|_\infty + n^2 \int_0^t \|f_1^n(s, \cdot, \cdot)\|_\infty ds.$$

Finalement, on en déduit grâce à l'inégalité de Gronwall que pour tout $t \geq 0$,

$$\|f_1^n(t, \cdot, \cdot)\|_\infty \leq \|h_1^n\|_\infty \exp(n^2 t). \quad (2.64)$$

On peut remarquer ici l'intérêt de remplacer $f_{1,in}$ par $f_{1,in} \mathbf{1}_{\{f_{1,in} \leq n\}}$ afin d'avoir une donnée initiale h_1^n bornée en norme $\|\cdot\|_\infty$. De la même façon, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \geq 0$, $\|f_2^n(t, \cdot, \cdot)\|_\infty < \infty$. On peut maintenant en déduire que

pour tout $t \geq 0$, $(f_1^n(t, \cdot, \cdot), f_2^n(t, \cdot)) \in L_r \log L_r \times L \log L$: en effet

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} |f_1^n(t, v, r) \ln(f_1^n(t, v, r))| dr dv \\
&= \iint_{\{f_1^n \geq 1\}} f_1^n(t, v, r) \ln(f_1^n(t, v, r)) dr dv \\
&\quad + \iint_{\{f_1^n \leq 1\}} f_1^n(t, v, r) (-\ln(f_1^n(t, v, r))) dr dv \\
&\leq \ln \|f_1^n(t, \cdot, \cdot)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1^n(t, v, r) dr dv + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1^n(t, v, r) (|v|^2 + n^2 t + \ln(n)) dr dv \\
&\leq (2n^2 t + \ln(n) + \ln \|h_1^n\|_\infty) M_1,
\end{aligned}$$

d'après (2.57) ; et de façon similaire on peut montrer que pour tout $t \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f_2^n(t, v) \ln(f_2^n(t, v))| dv \leq Cst(n, t, f_{2,in}).$$

▷ Montrons ensuite la propriété de décroissance de l'entropie. On remarque que

$$\frac{\partial}{\partial t} (f_1^n \ln(f_1^n)) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)(t)\|_c} (1 + \ln(f_1^n)) R_1^n(f_1^n, f_2^n),$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} (f_2^n \ln(f_2^n)) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)(t)\|_c} (1 + \ln(f_2^n)) (Q^n(f_2^n, f_2^n) + R_2(f_1^n, f_2^n));$$

de plus grâce aux inégalités (2.62), (2.63), et (2.64), on peut montrer que

$$\ln(f_1^n)(t, \cdot, \cdot) R_1^n(f_1^n, f_2^n)(t, \cdot, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3 \times [r_{min}, r_{max}]),$$

et

$$\ln(f_2^n)(t, \cdot) (Q^n(f_2^n, f_2^n) + R_2(f_1^n, f_2^n))(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& \mathcal{H}(f_1^n, f_2^n)(t) - \mathcal{H}(f_1^n, f_2^n)(s) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_s^t \frac{\partial}{\partial \tau} (f_1^n \ln(f_1^n))(\tau, v, r) d\tau dr dv + \int_{\mathbb{R}^3} \int_s^t \frac{\partial}{\partial \tau} (f_2^n \ln(f_2^n))(\tau, v) d\tau dv \\
&= \int_s^t \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1, f_2)(\tau)\|_c} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \{(1 + \ln(f_1^n)) R_1^n(f_1^n, f_2^n)\}(\tau, v, r) dr dv \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^3} \{(1 + \ln(f_2^n)) (Q^n(f_2^n, f_2^n) + R_2(f_1^n, f_2^n))\}(\tau, v) dv \right] d\tau.
\end{aligned}$$

Or, en utilisant la Propriété (2.7) pour l'opérateur à section tronquée $Q^n(f_2^n, f_2^n)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} (1 + \ln(f_2^n)(\tau, v)) (Q^n(f_2^n, f_2^n)(\tau, v)) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \ln(f_2^n)(\tau, v) Q^n(f_2^n, f_2^n)(\tau, v) dv \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} [f_2^n(\tau, v') f_2^n(\tau, v'_*) - f_2^n(\tau, v) f_2^n(\tau, v_*)] \ln \left[\frac{f_2^n(\tau, v') f_2^n(\tau, v'_*)}{f_2^n(\tau, v) f_2^n(\tau, v_*)} \right] \\ & \quad \times B^n(|v - v_*|, |\sigma \cdot (v - v_*)|) d\omega dv dv_*. \end{aligned}$$

De l'inégalité $(x - y) \ln(x/y) \geq 0$ valable pour tous x et y positifs, on déduit alors que pour tout $\tau \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1 + \ln(f_2^n)(\tau, v)) Q^n(f_2^n, f_2^n)(\tau, v) dv \leq 0.$$

Posons ensuite

$$J := \int_{\mathbb{R}^3} \left[(1 + \ln(f_2^n)) R_2^n(f_1^n, f_2^n)(\tau, v) + \int_{r_{min}}^{r_{max}} (1 + \ln(f_1^n)) R_1^n(f_1^n, f_2^n)(\tau, v, r) dr \right] dv.$$

En prenant $\varphi = 1 + \ln(f_1^n)$ et $\psi = 1 + \ln(f_2^n)$ dans (2.17), on obtient

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [f_1^n(\tau, v'_1, r) f_2^n(\tau, v'_2) - f_2^n(\tau, v_2) f_1^n(\tau, v_1, r)] \\ & \quad \times \ln \left[\frac{f_1^n(\tau, v'_1, r) f_2^n(\tau, v'_2)}{f_2^n(\tau, v_2) f_1^n(\tau, v_1, r)} \right] q^n(|v - v_2|, |\omega \cdot (v_1 - v_2)|, r) dr d\omega dv_1 dv_2, \end{aligned}$$

et ainsi $J \leq 0$. Finalement la propriété (2.60) est donc vérifiée. On obtient donc en particulier que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathcal{H}(f_1^n, f_2^n)(t) \leq \mathcal{H}(h_1^n, h_2^n).$$

▷ Montrons maintenant qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive de limite nulle telle que

$$\mathcal{H}(h_1^n, h_2^n) \leq \mathcal{H}(f_{1,in}, f_{2,in}) + u_n.$$

On utilise pour cela la relation suivante : pour $x > 0$, $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} x \ln(x) - y \ln(y) &= -x \left(\frac{y}{x} \ln \left(\frac{y}{x} \right) + 1 - \frac{y}{x} \right) + (x - y)(\ln(x) + 1) \\ &\leq (x - y)(\ln(x) + 1), \end{aligned} \tag{2.65}$$

reposant sur l'inégalité de convexité classique $u \ln(u) + 1 - u \geq 0$ pour $u \geq 0$. On a

alors

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(h_1^n, h_2^n)(t) - \mathcal{H}(f_{1,in}, f_{2,in}) \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left(f_{2,in}(v) \left(\mathbb{1}_{\{f_{2,in} \leq n\}} - 1 \right) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \right) \left[\ln \left(f_{2,in}(v) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \right) + 1 \right] dv \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left(f_{1,in}(v, r) \left(\mathbb{1}_{\{f_{1,in} \leq n\}} - 1 \right) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \right) \\ & \quad \times \left[\ln \left(f_{1,in}(v, r) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \right) + 1 \right] dr dv. \end{aligned}$$

Pour tout $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $f_{2,in}(v) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} & \left[f_{2,in}(v) \left(\mathbb{1}_{\{f_{2,in} \leq n\}}(v) - 1 \right) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \right] \left[\ln \left(f_{2,in}(v) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \right) + 1 \right] \\ & \leq f_{2,in}(v) \mathbb{1}_{\{f_{2,in} \geq n\}}(v) \left| \ln \left(f_{2,in}(v) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \right) \right| + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \\ & \leq \frac{1}{n} e^{-|v|^2}, \end{aligned}$$

car $\mathbb{1}_{\{f_{2,in} \geq n\}}(v) = 0$. Puis pour tout v tel que $f_{2,in}(v) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} & \left[f_{2,in}(v) \left(\mathbb{1}_{\{f_{2,in} \leq n\}}(v) - 1 \right) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \right] \left[\ln \left(f_{2,in}(v) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \right) + 1 \right] \\ & \leq \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \ln \left(f_{2,in}(v) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \right) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \\ & \leq \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \ln \left(f_{2,in}(v) + e^{-|v|^2} \right) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \\ & \leq \frac{1}{n} f_{2,in}(v) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2}, \end{aligned}$$

grâce à la croissance de \ln puis à la propriété $x \ln(x+y) \leq y$ pour $x \in [0, 1]$ et $y \geq 0$. De la même façon, on obtient

$$\begin{aligned} & \left(f_{1,in}(v, r) \left(\mathbb{1}_{\{f_{1,in} \leq n\}} - 1 \right) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \right) \left[\ln \left(f_{1,in}(v, r) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2} \right) + 1 \right] \\ & \leq \frac{1}{n} f_{1,in}(v, r) + \frac{1}{n} e^{-|v|^2}. \end{aligned}$$

Finalement on a

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}(h_1^n, h_2^n)(t) - \mathcal{H}(f_{1,in}, f_{2,in}) \\ & \leq \frac{1}{n} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) dv + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_{1,in}(v, r) dv dr + 2(1 + r_{max} - r_{min}) \pi^{3/2} \right), \end{aligned}$$

et on obtient la propriété (2.61).

▷ De plus, d'après la relation (2.65) appliquée à $x = \exp(-|v|)$ et $y = f_2^n(t, v)$, on a

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq f_2(t, v) \leq 1, \quad f_2^n(t, v) |\ln(f_2^n(t, v))| \leq \exp(-|v|) + f_2^n(t, v) (|v| - 1). \quad (2.66)$$

De même, pour tout $(r, v) \in [r_{min}, r_{max}] \times \mathbb{R}^3$ tel que $0 \leq f_1(t, v, r) \leq 1$, on a

$$f_1^n(t, v, r) |\ln(f_1^n(t, v, r))| \leq \exp(-|v|) + f_1^n(t, v, r) (|v| - 1). \quad (2.67)$$

Les inégalités (2.66), (2.67), (2.57) et (2.58) nous permettent d'en déduire que pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1^n(t, v, r) |\ln(f_1^n(t, v, r))| dr dv + \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(t, v) |\ln(f_2^n(t, v))| dv \\ &= \mathcal{H}(f_1^n, f_2^n)(t) + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1^n(t, v, r) |\ln(f_1^n(t, v, r))| \mathbb{1}_{\{f_1^n \leq 1\}} dr dv \\ & \quad - 2 \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(t, v) |\ln(f_2^n(t, v))| \mathbb{1}_{\{f_2^n \leq 1\}} dv \\ & \leq \mathcal{H}(f_{1,in}, f_{2,in}) + u_n + M_1 + M_2 + (1 + r_{max} - r_{min}) \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-|v|) dv. \end{aligned}$$

Finalement on obtient donc :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1^n |\ln(f_1^n)| (t, v, r) dr dv < +\infty, \quad (2.68)$$

et

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n |\ln(f_2^n)| (t, v) dv < +\infty. \quad (2.69)$$

2.4 Existence d'une solution (f_1, f_2) pour le couplage B/B

2.4.1 Extraction d'une sous-suite convergente de $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

La Proposition 2.2 nous permet de définir une suite $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de solutions au système (2.36) muni des conditions initiales (2.37)–(2.38) ; nous montrons maintenant l'existence de solutions au problème (2.4) par extraction d'une sous-suite convergente. Pour cela nous prouvons que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la suite $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est contenue dans un compact faible de $L^1_{t,\gamma}$ et que la suite $(f_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est contenue dans un compact faible de $L^1_{t,\gamma,r}$ grâce au critère de compacité de Dunford-Pettis que l'on rappelle ici [Br] :

Théorème 2.2 (Dunford-Pettis) Soit Ω un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^d , F un sous-ensemble de $L^1(\Omega, \mu)$. Alors F est relativement compact dans $L^1(\Omega, \mu)$ pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ si et seulement si :

1. F est borné dans $L^1(\Omega, \mu)$,
2. on a équiintégrabilité uniforme :

$$\forall \eta > 0, \exists \Upsilon > 0 / \forall A \subset \Omega, A \text{ mesurable}, \mu(A) < \Upsilon, \quad \forall f \in F, \quad \int_A f d\mu < \eta, \quad (2.70)$$

3. on a équiintégrabilité à l'infini :

$$\forall \eta > 0, \exists K \subset \Omega, K \text{ compact} / \quad \forall f \in F, \quad \int_{\Omega-K} f d\mu < \eta. \quad (2.71)$$

Proposition 2.6 Soit $(f_{1,in}, f_{2,in}) \in (L^1_{2,r} \cap L_r \log L_r) \times (L^1_2 \cap L \log L)$ vérifiant $f_{2,in} \geq 0$, $f_{1,in} \geq 0$, et $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\gamma \in [0, 2[$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le couple $(f_1^n, f_2^n) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, L^1_{2,r} \times L^1_2)$ solution de (2.36). On peut alors extraire des suites $(f_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites, encore notées $(f_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui convergent faiblement dans $L^1_{t,\gamma,r}$ et $L^1_{t,\gamma}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ vers deux fonctions notées f_1 et f_2 (indépendantes de γ et t), c'est-à-dire :

$$\forall \varphi \in L^\infty_{v,t}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(s, v) f_2^n(s, v) (1 + |v|^\gamma) dv ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(s, v) f_2(s, v) (1 + |v|^\gamma) dv ds,$$

et

$$\begin{aligned} \forall \psi \in L^\infty_{v,r,t}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(s, v, r) f_1^n(s, v) (1 + |v|^\gamma) dv dr ds \\ = \int_0^t \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(s, v, r) f_1(s, v) (1 + |v|^\gamma) dv dr ds. \end{aligned}$$

De plus, $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$ p.p, et pour tout $\gamma \in [0, 2]$

$$(f_1, f_2) \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^1_{\gamma,r} \times L^1_\gamma),$$

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, v, r) (1 + |v|^\gamma) dr dv \leq M_1, \quad (2.72)$$

et

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) (1 + |v|^\gamma) dv \leq M_2, \quad (2.73)$$

où M_1 et M_2 sont les constantes introduites dans (2.57) et (2.58).

Preuve de la Proposition 2.6. Vérifions les trois points du critère de Dunford-Pettis.

- ▷ D'après (2.57) et (2.58), les suites $(f_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées dans $L^1_{t,\gamma,r}$ et $L^1_{t,\gamma}$, respectivement.
- ▷ Équicontinuité uniforme. Soit $A \subset]0, t[\times \mathbb{R}^3$ mesurable, $a > 1$, et

$$E = \{(s, v) / f_2^n(s, v) > a\}.$$

Alors

$$\int_{A \cap E^c} f_2^n(s, v) dv dt \leq a|A|, \quad (2.74)$$

et

$$\int_{A \cap E} f_2^n(s, v) dv ds \leq \frac{t}{\ln(a)} \sup_{\tau \in \mathbb{R}^+} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(\tau, v) |\ln(f_2^n(\tau, v))| dv, \quad (2.75)$$

ce qui permet d'obtenir la propriété (2.70) pour la mesure $d\mu = dv ds$. On vérifie ensuite cette propriété pour $d\mu = |v|^\gamma dv ds$: soit $b > 1$; en distinguant les cas $|v|^\gamma < b$ et $|v|^\gamma > b$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_A f_2^n(s, v) |v|^\gamma dv dt &\leq b \int_A f_2^n(s, v) dv dt + \frac{1}{b^{2-\gamma}} \int_A f_2^n(s, v) |v|^2 dv dt \\ &\leq b \int_A f_2^n(s, v) dv dt + \frac{1}{b^{2-\gamma}} M_2, \end{aligned}$$

ce qui permet d'en déduire, en utilisant (2.74) et (2.75), que la suite $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi équiintégrable pour la mesure $d\mu = |v|^\gamma dv ds$. On procède de façon similaire pour montrer l'équiintégrabilité de la suite $(f_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

▷ Équiintégrabilité à l'infini. Pour $M \geq 1$ et $K = B(0, M) \times [0, t]$, on a

$$\begin{aligned} \iint_K f_2^n(s, v)(1 + |v|^\gamma) dv ds &\leq \left(\frac{1}{M^2} + \frac{1}{M^{2-\gamma}} \right) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(s, v) |v|^2 dv ds \\ &\leq \frac{2}{M^{2-\gamma}} M_2 t, \end{aligned}$$

ce qui permet d'en déduire l'équiintégrabilité à l'infini de la suite $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On procède de manière analogue pour obtenir l'équiintégrabilité à l'infini de la suite $(f_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

De plus f_1 et f_2 sont positives presque partout en tant que limites faibles de fonctions positives. Par ailleurs, pour $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^+)$ positive et $\gamma \in [0, 2]$, on a d'après (2.57) et (2.58) :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1^n(s, v, r) (1 + |v|^\gamma) dr dv \phi(s) ds \leq M_1 \int_{\mathbb{R}^+} \phi(s) ds, \quad (2.76)$$

et

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(s, v)(1 + |v|^\gamma) dv ds \leq M_2 \int_{\mathbb{R}^+} \phi(s) ds, \quad (2.77)$$

d'après (2.57) et (2.58). Par passage à la limite on obtient alors, puisque f_1 et f_2 sont positives,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1(s, v, r) (1 + |v|^\gamma) dr dv \phi(s) ds \\ &\leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1^n(s, v, r) (1 + |v|^\gamma) dr dv \phi(s) ds \\ &\leq M_1 \int_{\mathbb{R}^+} \phi(s) ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(s, v)(1 + |v|^\gamma) dv \phi(s) ds \\ &\leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(s, v)(1 + |v|^\gamma) dv \phi(s) ds \\ &\leq M_2 \int_{\mathbb{R}^+} \phi(s) ds, \end{aligned}$$

pour tout $\gamma \in [0, 2]$. On en déduit finalement (cf. [Br] p. 38) (2.72) et (2.73). \diamond

2.4.2 Convergence des opérateurs de collision

Nous utiliserons dans la suite la propriété suivante :

Lemme 2.2 *Il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$, telles que pour tout $\gamma \in [0, 1]$, pour tout $h > 0$*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_1^n(t+h, \cdot, \cdot) - f_1^n(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1_{\gamma, r}} \leq C_1 h, \quad (2.78)$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_2^n(t+h, \cdot) - f_2^n(t, \cdot)\|_{L^1_\gamma} \leq C_2 h. \quad (2.79)$$

Preuve du Lemme 2.2. Puisque $(f_1^n, f_2^n) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, L^1_{2, r} \times L^1_2)$, on a pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} |f_2^n(t+h, v) - f_2^n(t, v)| (1 + |v|^\gamma) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_t^{t+h} \frac{\partial f_2^n}{\partial s}(s, v) ds \right| (1 + |v|^\gamma) dv \\ &\leq \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^3} (|Q^n(f_2^n, f_2^n)(s, v)| + |R_2^n(f_1^n, f_2^n)(s, v)|) (1 + |v|^\gamma) dv ds \\ &\leq C_1 \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(s, v) f_2^n(s, v_*) (1 + |v - v_*|) (1 + |v|^\gamma + |v'|^\gamma) dv dv_* \\ &\quad + C_2 \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1^n(s, v_1) f_2^n(s, v_2) |v_1 - v_2| (1 + |v_1|^\gamma + |v_1'|^\gamma) dr dv dv_* \\ &\leq C_3 \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(s, v) f_2^n(s, v_*) (1 + |v - v_*|) (1 + |v|^\gamma + |v_*|^\gamma) dv dv_* \\ &\quad + C_4 \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1^n(s, v_1) f_2^n(s, v_2) |v_1 - v_2| (1 + |v_1|^\gamma + |v_{12}|^\gamma) dr dv dv_* \\ &\leq C_5 M_2(M_2 + M_1)h, \end{aligned}$$

d'après (2.57) et (2.58). De même, on montre que pour tout $n \in \mathbb{R}^+$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} |f_1^n(t+h, v, r) - f_1^n(t, v, r)| (1 + |v|^\gamma) dr dv \leq Cst h. \diamond$$

2.4.2.1 Convergence de l'opérateur $Q^n(f_2^n, f_2^n)$

Proposition 2.7 *Soit $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite extraite dans la Proposition 2.6, Q^n l'opérateur définie par (2.27) et Q celui définie par (2.5). Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^3)$, et $t \in \mathbb{R}^+$, on a :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t Q^n(f_2^n, f_2^n)(s, v) ds \varphi(v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t Q(f_2, f_2)(s, v) ds \varphi(v) dv.$$

Preuve de la Proposition 2.7. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^3)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $Q^{n+}(f_1^n, f_2^n)$ le terme de gain de l'opérateur $Q^n(f_1^n, f_2^n)$ défini par

$$Q^{n+}(f_2^n, f_2^n)(t, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_2^n(t, v') f_2^n(t, v'_*) B^n(|v - v_*|, |\sigma \cdot (v - v_*)|) d\sigma dv_*,$$

et $Q^+(f_2, f_2)$ le terme de gain de l'opérateur $Q(f_1, f_2)$ défini par

$$Q^+(f_1, f_2)(t, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_2(t, v') f_2(t, v'_*) B(|v - v_*|, |\sigma \cdot (v - v_*)|) d\sigma dv_*.$$

Après un changement de variable, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t Q^{n+}(f_2^n, f_2^n)(s, v) ds \varphi(v) dv \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(v') f_2^n(s, v) f_2^n(s, v_*) B^n(|v - v_*|, |\sigma \cdot (v - v_*)|) d\sigma dv_* dv ds, \end{aligned} \quad (2.80)$$

et en exprimant la section de collision $B^n(|v - v_*|, |\sigma \cdot (v - v_*)|)$ sous la forme

$$B^n(|v - v_*|, |\sigma \cdot (v - v_*)|) = \left[\frac{n}{4\pi} - |v - v_*|^\delta b(\cos(\chi)) \right] \mathbf{1}_{\{|v - v_*|^\delta b(\cos(\chi)) \geq \frac{n}{4\pi}\}} + |v - v_*|^\delta b(\cos(\chi)),$$

on peut écrire l'intégrale précédente comme la somme de trois intégrales :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t Q^{n+}(f_2^n, f_2^n)(s, v) ds \varphi(v) dv = J_1^{n+} + J_2^{n+} + J_3^{n+},$$

où

$$\begin{aligned} J_1^{n+} &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(v') f_2^n(s, v) f_2^n(s, v_*) \left[\frac{n}{4\pi} - |v - v_*|^\delta b(\cos(\chi)) \right] \\ &\quad \times \mathbf{1}_{\{|v - v_*|^\delta b(\cos(\chi)) \geq \frac{n}{4\pi}\}} d\sigma dv_* dv ds, \end{aligned}$$

$$J_2^{n+} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(v') f_2^n(s, v) f_2^n(s, v_*) |v - v_*|^\delta b(\cos(\chi)) d\sigma dv_* dv ds,$$

et

$$J_3^{n+} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(v') f_2^n(s, v) (f_2^n(s, v_*) - f_2(s, v_*)) |v - v_*|^\delta b(\cos(\chi)) d\sigma dv_* dv ds.$$

Puisque $\delta \in [0, 1]$ on a pour tout $v \in \mathbb{R}^3$

$$|v - v_*|^\delta \leq (1 + |v|) (1 + |v_*|),$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in \mathbb{S}^2$

$$\begin{aligned} & \left\{ (v, v_*)/b(\cos(\chi)) |v - v_*|^\delta \geq \frac{n}{4\pi} \right\} \\ & \subset \left\{ (v, v_*)/b(\cos(\chi)) (1 + |v|) \geq \frac{n}{8\pi} \right\} \cup \left\{ (v, v_*)/b(\cos(\chi)) (1 + |v_*|) \geq \frac{n}{8\pi} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi par symétrie sur v et v_* , on obtient

$$\begin{aligned} |J_1^{n+}| &\leq 2\|\varphi\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_2^n(s, v) f_2^n(s, v_*) |v - v_*|^\delta \\ &\quad \times b(\cos(\chi)) \mathbf{1}_{\{b(\cos(\chi))(1 + |v|) \geq \frac{n}{8\pi}\}} d\sigma dv_* dv ds. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme

$$|v - v_*|^\delta (1 + |v|) \leq 3(1 + |v|^2)(1 + |v_*|^2),$$

on a

$$|v - v_*|^\delta \mathbb{1}_{\{b(\cos(\chi))(1+|v|) \geq \frac{n}{8\pi}\}} \leq \frac{24\pi}{n} b(\cos(\chi)) (1 + |v|^2) (1 + |v_*|^2).$$

De plus, d'après l'hypothèse effectuée sur le noyau b , on a

$$\Theta := \int_{\mathbb{S}^2} b(\cos(\chi))^2 d\sigma < +\infty. \quad (2.81)$$

On obtient donc

$$|J_1^{n+}| \leq \frac{Cst}{n} \|\varphi\|_\infty t,$$

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_1^{n+} = 0$.

Ensuite, en écrivant J_2^+ sous la forme

$$J_2^+ = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(s, v) k(s, v) dv ds,$$

où

$$k(s, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(v') f_2(s, v_*) |v - v_*|^\delta b(\cos(\chi)) d\sigma dv_*,$$

on obtient immédiatement d'après la Proposition 2.6 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_2^{n+} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t Q^+(f_2, f_2)(s, v) ds \varphi(v) dv.$$

Montrons finalement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_3^{n+} = 0$. Soit $\eta > 0$. On peut écrire :

$$J_3^{n+} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (f_2^n(s, v_*) - f_2(s, v_*)) h_n(s, v_*) dv_* ds,$$

avec

$$h_n(s, v_*) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(v') f_2^n(s, v) |v - v_*|^\delta b(\cos(\chi)) d\sigma dv.$$

Pour tout $v_* \in \mathbb{R}^3$, pour tout $s \in [0, t]$, on a

$$|h_n(s, v_*)| \leq \Theta \|\varphi\|_\infty M_2 (1 + |v_*|), \quad (2.82)$$

et puisque $f_2^n \in L_{2,t}^1$, $f_2 \in L_{2,t}^1$, il existe K un compact de \mathbb{R}^3 tel que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \iint_{[0,t] \times [\mathbb{R}^3 \cap K^c]} \left(|f_2^n(s, v_*)| + |f_2(s, v_*)| \right) (1 + |v_*|) dv_* ds < \frac{1}{3} \frac{1}{M_2 \Theta \|\varphi\|_\infty} \eta.$$

On a donc

$$\left| \iint_{[0,t] \times [\mathbb{R}^3 \cap K^c]} (f_2^n(s, v_*) - f_2(s, v_*)) h_n(s, v_*) dv_* ds \right| \leq \frac{\eta}{3}. \quad (2.83)$$

Il reste ensuite majorer le terme

$$\int_0^t \int_K (f_2^n(s, v_*) - f_2(s, v_*)) h_n(s, v_*) dv_* ds.$$

Montrons pour cela que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sauf sur un ensemble de mesure arbitrairement petite. Nous allons pour cela appliquer le Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov [Br] :

Théorème 2.3 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ω un ouvert tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$, ω compact. Soit \mathcal{F} un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que

$$\forall \mu > 0, \exists \Upsilon > 0, \Upsilon < \text{dist}(\omega, \Omega^c) / \forall h \in \mathbb{R}^d, |h| < \Upsilon \text{ et } \forall f \in \mathcal{F}, \quad \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \mu. \quad (2.84)$$

Alors \mathcal{F} est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

D'après (2.82),

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^t \int_K h_n(s, v) dv ds \leq A \|\varphi\|_\infty t M_2 \int_K (1 + |v_*|) dv_* < +\infty,$$

et donc $\mathcal{F} = \{h_n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans $L^1(K \times]0, t])$. De plus, comme $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^3)$, on a pour tout v, v_* et u :

$$\begin{aligned} & \left| \varphi \left(\frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*| \sigma}{2} \right) - \varphi \left(\frac{v + v_* + u}{2} + \frac{|v - v_* - u| \sigma}{2} \right) \right| \\ & \leq \|\varphi'\|_\infty \left(\frac{1}{2} |u| + \frac{1}{2} (|v - v_*| - |v - v_* - u|) \right) \\ & \leq \|\varphi'\|_\infty |u|. \end{aligned}$$

Ainsi, grâce au Lemme 2.2, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $s \in [0, t]$ et $h > 0$ tels que $s + h \leq t$, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $v_* + u \in K$:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_K |h_n(s + h, v_* + u) - h_n(s, v_*)| dv_* ds \\ & \leq \int_0^t \int_K |h_n(s + h, v_* + u) - h_n(s, v_* + u)| dv_* ds + \int_0^t \int_K |h_n(s, v_* + u) - h_n(s, v_*)| dv_* ds \\ & \leq Cst \|\varphi\|_\infty \sup_{v_* \in K} \{1 + |v_*|\} \int_0^t \|f_2^n(s + h, \cdot) - f_2^n(s, \cdot)\|_{L^1_1(\mathbb{R}^3)} ds \\ & \quad + Cst \|\varphi\|_\infty \int_0^t \int_K \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(s, v) \left| |v - v_* - u|^\delta - |v - v_*|^\delta \right| dv dv_* ds \\ & \quad + Cst \|\varphi'\|_\infty |u| \int_0^t \int_K \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(s, v) (1 + |v|)(1 + |v_*|) dv dv_* ds \\ & \leq Cst \|\varphi\|_\infty \sup_{v_* \in K} \{1 + |v_*|\} ht + Cst \|\varphi\|_\infty |K| M_2 |u|^\delta + Cst \|\varphi'\|_\infty \sup_{v_* \in K} \{1 + |v_*|\} M_2 |u|. \end{aligned}$$

La condition (2.84) est par suite vérifiée, et \mathcal{F} est relativement compact dans $L^1_{loc}(K \times]0, t])$. On peut donc extraire de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge dans $L^1_{loc}(K \times]0, t])$, puis une autre sous-suite, encore notée $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge presque-partout dans $K \times]0, t]$, vers une fonction que l'on notera h . Pour obtenir une convergence uniforme, appliquons finalement le Théorème d'Egorov, que l'on rappelle ici [Br] :

Théorème 2.4 (Egorov) Soit (X, B, μ) un espace mesurable, Ω un ensemble mesurable, avec $\mu(\Omega) < +\infty$. Soit $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans \mathbb{R} telle que $f^n \rightarrow F$ p.p sur Ω . Alors

$$\forall \eta > 0, \exists E \subset \Omega, E \text{ mesurable, avec } \mu(\Omega \setminus E) < \eta / f^n \rightarrow F \text{ uniformément sur } E.$$

Nous savons que

$$\|h_n\|_{L^\infty(K \times [0, t])} \leq A\|\varphi\|_\infty M_2 \int_K (1 + |v_*|) dv_* < +\infty.$$

De plus, d'après le critère d'équitégrabilité uniforme du Théorème de Dunford-Pettis appliqué à l'ensemble $F = \{f_2^n\} \cup f_2$, il existe $\Upsilon > 0$ tel que pour tout $A \subset \Omega$, A mesurable, $\mu(A) < \Upsilon$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_A \left(|f_2^n(s, v_*)| + |f_2(s, v_*)| \right) dv_* ds < \frac{\eta}{3\|h_n\|_{L^\infty(K \times [0, t])}}. \quad (2.85)$$

Par ailleurs, d'après le Théorème d'Egorov, il existe un ensemble $E \subset K \times [0, t]$ tel que $\mu(K \times [0, t] \setminus E) < \Upsilon$ et $h_n \rightarrow h$ dans $L^\infty(E)$. Le produit scalaire entre h_n et le terme $f_2^n - f_2$ vérifie donc d'une part (en écrivant $h_n = h + (h_n - h)$)

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}/n \geq n_0 \Rightarrow \left| \iint_E (f_2^n(s, v_*) - f_2(s, v_*)) h_n(s, v_*) dv_* ds \right| \leq \frac{\eta}{3}, \quad (2.86)$$

et d'autre part (d'après (2.85) appliqué à $A = K \times [0, t] \setminus E$)

$$\begin{aligned} & \iint_{K \times [0, t] \setminus E} |(f_2^n(s, v_*) - f_2(s, v_*)) h_n(s, v_*)| dv_* ds \\ & \leq \|h_n\|_{L^\infty(K \times [0, t])} \int_{K \times [0, t] \setminus E} (|f_2^n(s, v_*)| + |f_2(s, v_*)|) dv_* ds \\ & \leq \frac{\eta}{3}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Finalement on déduit de (2.83), (2.86) et (2.87) que

$$\forall n \geq n_0, \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (f_2^n(s, v_*) - f_2(s, v_*)) h_n(s, v_*) dv_* ds \leq \eta.$$

Par ailleurs, le terme de perte

$$Q^{n-}(f_1^n, f_2^n)(t, v) = f_2^n(t, v) \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_2^n(t, v_*) B^n(|v - v_*|, |\sigma \cdot (v - v_*)|) d\sigma dv_*,$$

de l'opérateur $Q^n(f_2^n, f_2^n)$, converge vers le terme de perte

$$Q^-(f_1, f_2)(t, v) = f_2(t, v) \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_2(t, v_*) B^n(|v - v_*|, |\sigma \cdot (v - v_*)|) d\sigma dv_*,$$

de l'opérateur $Q(f_2, f_2)$. En effet, comme

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t Q^{n-}(f_2^n, f_2^n)(s, v) ds \varphi(v) dv \\ & = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(v) f_2^n(s, v) f_2^n(s, v_*) B^n(|v - v_*|, |\sigma \cdot (v - v_*)|) d\sigma dv_* dv ds, \end{aligned}$$

la démonstration précédente s'adapte immédiatement, avec $\varphi(v)$ au lieu de $\varphi(v')$ dans (2.80). Ceci achève la démonstration de la Proposition 2.7. \diamond

2.4.2.2 Convergence des opérateurs $R_1^n(f_1^n, f_2^n)$ et $R_2^n(f_1^n, f_2^n)$

Proposition 2.8 Soient $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(f_1^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites extraites dans la Proposition 2.6, et R_1 et R_2 les opérateurs définis en (2.8) et (2.9). Alors pour tous $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^3 \times [r_{\min}, r_{\max}])$, on a :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^t R_1^n(f_1^n, f_2^n)(s, v, r) ds \psi(v, r) dr dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^t R_1(f_1, f_2)(s, v, r) ds \psi(v, r) dr dv, \end{aligned}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t R_2^n(f_1^n, f_2^n)(s, v) ds \varphi(v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t R_2(f_1, f_2)(s, v) ds \varphi(v) dv.$$

Preuve de la Proposition 2.8. Montrons que

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^t R_1^{n+}(f_1^n, f_2^n)(s, v, r) ds \psi(v, r) dr dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^t R_1^+(f_1, f_2)(s, v, r) ds \psi(v, r) dr dv, \end{aligned}$$

où $R_1^{n+}(f_1^n, f_2^n)$ et $R_1^+(f_1, f_2)$ sont les termes de gain des opérateurs $R_1^n(f_1^n, f_2^n)$ et $R_1(f_1, f_2)$ respectivement. On peut écrire

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^t R_1^{n+}(f_1^n, f_2^n)(s, v, r) ds \psi(v, r) dr dv \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_2^n(s, v_2) f_1^n(s, v_1, r) q^n(|v_1 - v_2|, |\omega \cdot (v_1 - v_2)|, r) \int_{\mathbb{S}^2} \psi(v'_1, r) d\omega dr dv_1 dv_2 ds \\ &= J_1^{n+} + J_2^{n+} + J_3^{n+}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} J_1^{n+} &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_2^n(s, v_2) f_1^n(s, v_1, r) \left[\frac{n}{4\pi} - \frac{1}{2} |(v_1 - v_2) \cdot \omega| (\varrho + r)^2 \right] \\ &\quad \times \mathbb{1}_{\{|(v_1 - v_2) \cdot \omega| (\varrho + r)^2 \geq \frac{n}{2\pi}\}} \psi(v'_1, r) dr d\omega dv_1 dv_2 ds, \end{aligned}$$

$$J_2^{n+} = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_2(s, v_2) f_1^n(s, v_1, r) |(v_1 - v_2) \cdot \omega| (\varrho + r)^2 \psi(v'_1, r) dr d\omega dv_1 dv_2 ds,$$

et

$$\begin{aligned} J_3^{n+} &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} (f_2^n(s, v_2) - f_2(s, v_2)) f_1^n(s, v_1, r) \psi(v'_1, r) \\ &\quad \times \frac{1}{2} (\varrho + r)^2 |(v_1 - v_2) \cdot \omega| dr d\omega dv_1 dv_2 ds. \end{aligned}$$

On peut majorer $|J_1^{n+}|$ par

$$|J_1^{n+}| \leq \frac{Cst}{n} \|\psi\|_{\infty} t,$$

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_1^{n+} = 0$.

De plus, la Proposition 2.6 nous permet d'obtenir immédiatement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_2^{n+} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^t R_1^+(f_1, f_2)(s, v, r) ds \psi(v, r) dr dv.$$

Ensuite, en écrivant J_3^{n+} sous la forme

$$J_3^{n+} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (f_2^n(s, v_2) - f_2(s, v_2)) h_n(s, v_2) dv_2 ds,$$

avec

$$h_n(s, v_2) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1^n(s, v_1, r) |(v_1 - v_2) \cdot \omega| (\varrho + r)^2 \psi(v_1', r) dr d\omega dv_1,$$

on peut montrer, de façon similaire à ce qui a été fait dans la démonstration de la Proposition 2.7, que, quitte à extraire une sous-suite de $(J_3^{n+})_{n \in \mathbb{N}}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_3^{n+} = 0$.

Les démonstrations de la convergence faible du terme de perte $R_1^{n-}(f_1^n, f_2^n)$ de l'opérateur $R_1^n(f_1^n, f_2^n)$, puis des termes de gain et de perte $R_2^{n+}(f_1^n, f_2^n)$ et $R_2^{n-}(f_1^n, f_2^n)$ de l'opérateur $R_2^n(f_1^n, f_2^n)$ sont similaires. \diamond

Nous sommes maintenant en mesure d'établir les relations vérifiées par f_1 et f_2 . La suite de solutions $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ du système (2.36) muni des conditions initiales (2.37) et (2.38) vérifie : pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^3)$, pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^3 \times [r_{\min}, r_{\max}])$, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1^n(t, v, r) \psi(v, r) dr dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} h_1^n(v, r) \psi(v, r) dr dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^t \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c(s)} R_1^n(f_1^n, f_2^n)(s, v, r) \psi(v, r) dr dv ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(t, v) \varphi(v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(t, v) \varphi(v) dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \left(\frac{Q^n(f_2^n, f_2^n)(s, v) + R_2^n(f_1^n, f_2^n)(s, v)}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c(s)} \right) ds \varphi(v) dv. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^t \left[\frac{R_1^n(f_1^n, f_2^n)(s, v, r)}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c(s)} - R_1(f_1, f_2)(s, v, r) \right] ds \psi(v, r) dr dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^t \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c(s)} - 1 \right) R_1^n(f_1^n, f_2^n)(s, v, r) ds \psi(v, r) dr dv \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^t [R_1^n(f_1^n, f_2^n) - R_1(f_1, f_2)](s, v, r) ds \psi(v, r) dr dv, \end{aligned}$$

et que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_0^t \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c(s)} - 1 \right) R_1^n(f_1^n, f_2^n)(s, v, r) ds \psi(v, r) dr dv \right| \leq \frac{Cst}{n} (M_1 + M_2) \|\psi\|_\infty M_1 M_2 t$$

d'après (2.57) et (2.58), on peut en déduire grâce à la Proposition 2.8 que pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_0^t \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c(s)} R_1^n(f_1^n, f_2^n)(s, v, r) \psi(v, r) ds dr dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_0^t R_1(f_1, f_2)(s, v, r) ds \psi(v, r) dr dv. \end{aligned} \quad (2.88)$$

De même, grâce à la Proposition 2.7 et à (2.57) et (2.58), on a

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \left(\frac{Q^n(f_2^n, f_2^n)(s, v) + R_2^n(f_1^n, f_2^n)(s, v)}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c(s)} \right) ds \varphi(v) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t (Q(f_2, f_2)(s, v) + R_2(f_1, f_2)(s, v)) ds \varphi(v) dv. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Par ailleurs, on montre grâce au Théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} h_1^n(v, r) \psi(v, r) dr dv = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_{1,in}(v, r) \psi(v, r) dr dv, \quad (2.90)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} h_2^n(v) \varphi(v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) \varphi(v) dv. \quad (2.91)$$

Finalement, d'après la Proposition 2.6 et les relations (2.88), (2.89), (2.90) et (2.91), (f_1, f_2) vérifie les relations suivantes : pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, v, r) \psi(v, r) dr dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_{1,in}(v, r) \psi(v, r) dr dv + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_0^t R_1(f_1, f_2)(s, v, r) ds \psi(v, r) dr dv, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) \varphi(v) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) \varphi(v) dv + \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t (Q(f_2, f_2)(s, v) + R_2(f_1, f_2)(s, v)) ds \varphi(v) dv. \end{aligned}$$

On en déduit que les relations (2.21) et (2.22) sont vérifiées pour presque tout $v \in \mathbb{R}^3$ et

presque tout $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$. De plus, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\gamma \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
& \|f_1(t+h, \cdot, \cdot) - f_1(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1_{\gamma, r}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_t^{t+h} |R_1(f_1, f_2)(s, v, r)| (1 + |v|^\gamma) ds dr dv \\
&\leq Cst_1 \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1(s, v_1, r) f_2(s, v_2) |v_1 - v_2| (1 + |v_1|^\gamma + |v_2|^\gamma) dr dv_1 dv_2 ds \\
&\leq Cst_2 \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1(s, v_1, r) f_2(s, v_2) |v_1 - v_2| (1 + |v_1|^\gamma + |v_2|^\gamma) dr dv_1 dv_2 ds \\
&\leq Cst_2 \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1(s, v_1, r) (1 + |v_1|^2) dr dv_1 \int_{\mathbb{R}^3} f_2(s, v_2) (1 + |v_2|^2) dv_2 ds,
\end{aligned}$$

d'après (2.10). Ainsi, d'après (2.72) et (2.73),

$$\|f_1(t+h, \cdot, \cdot) - f_1(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1_{\gamma, r}} \leq Cst h.$$

De même,

$$\|f_2(t+h, \cdot, \cdot) - f_2(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1_{\gamma}} \leq Cst h,$$

et ainsi $(f_1, f_2) \in \text{Lip}(\mathbb{R}^+, L^1_{\gamma, r}) \times \text{Lip}(\mathbb{R}^+, L^1_{\gamma})$.

2.5 Établissement de l'inégalité d'entropie

Nous prouvons dans cette partie l'inégalité d'entropie (2.25) relative à (f_1, f_2) à partir de l'inégalité (2.61) relative à (f_1^n, f_2^n) . Comme la convergence de la suite $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans l'espace $L^1_{t, \gamma, r} \times L^1_{t, \gamma}$ faible ne suffit pas à passer à la limite dans l'inégalité d'entropie (2.61), nous montrons préalablement que pour tout $T > 0$, on peut extraire une sous-suite de $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, encore notée $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, telle que pour tout $t \in [0, T]$, $(f_1^n(t, \cdot, \cdot), f_2^n(t, \cdot, \cdot))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge faiblement dans $L^1_{\gamma, r} \times L^1_{\gamma}$. C'est l'objet des deux Lemmes suivants.

Lemme 2.3 Soit $(f_{1, \text{in}}, f_{2, \text{in}}) \in L^1_{2, r} \times L^1_2$ vérifiant $f_{1, \text{in}} \geq 0$, $f_{2, \text{in}} \geq 0$ p.p, $T > 0$, $(f_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites extraites dans la Proposition 2.6 et (f_1, f_2) les fonctions introduites à la Proposition (2.6). Alors on peut extraire des sous-suites, encore notés $(f_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, telles que pour tout $t \in [0, T]$, $f_1^n(t, \cdot, \cdot)$ converge vaguement vers $f_1(t, \cdot, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3 \times [r_{\min}, r_{\max}])$ et $f_2^n(t, \cdot, \cdot)$ converge vaguement vers $f_2(t, \cdot, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^3)$.

Preuve du Lemme 2.3. Les espaces $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^3 \times [r_{\min}, r_{\max}])$ étant séparables, on considère une famille $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dense dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^3)$ et une famille $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dense dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^3 \times [r_{\min}, r_{\max}])$. On pose, pour $t \in [0, T]$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$F_1^{n, k}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1^n(t, v, r) \psi^k(v, r) dv dr, \quad F_1^k(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1(t, v, r) \psi^k(v, r) dv dr,$$

et

$$F_2^{n, k}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_2^n(t, v, r) \psi^k(v, r) dv dr, \quad F_2^k(t) = \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) \varphi_k(v) dv.$$

Pour prouver le Lemme 2.3, il suffit de montrer que l'on peut extraire de la suite $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(f_1^{\Lambda(n)}, f_2^{\Lambda(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que la suite $(F_1^{\Lambda(n),k}, F_2^{\Lambda(n),k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, T]$ vers (F_1^k, F_2^k) pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, pour $\eta > 0$ fixé et $(\psi, \varphi) \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^3 \times [r_{\min}, r_{\max}]) \times \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^3)$, il existe $(k_1, k_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $\|\psi - \psi_{k_1}\|_\infty \leq \eta$, $\|\varphi - \varphi_{k_2}\|_\infty \leq \eta$, et on a alors

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^3} (f_2^n(t, v) - f_2(t, v)) \varphi(v) dv \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3} |f_2^n(t, v) - f_2(t, v)| |\varphi_{k_2}(v) - \varphi(v)| dv + \left| \int_{\mathbb{R}^3} (f_2^n(t, v) - f_2(t, v)) \varphi_{k_2}(v) dv \right| \\ & \leq 2M_2\eta + \left| \int_{\mathbb{R}^3} (f_2^n(t, v) - f_2(t, v)) \varphi_{k_2}(v) dv \right|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} (f_1^n(t, v, r) - f_1(t, v, r)) \psi(v, r) dr dv \right| \\ & \leq 2M_2\eta + \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} (f_1^n(t, v, r) - f_1(t, v, r)) \psi_{k_1}(v, r) dr dv \right|, \end{aligned}$$

ce qui permettra de conclure. D'après (2.78) et (2.79), les ensembles $\{F_1^{n,k}, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{F_2^{n,k}, n \in \mathbb{N}\}$ sont relativement compacts dans $L^1([0, T])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On peut ainsi appliquer le Théorème 2.3, et extraire de $(F_1^{n,k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(F_2^{n,k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ des sous-suites, encore notées $(F_1^{n,k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(F_2^{n,k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui convergent dans $L^1([0, T])$. Or d'après la Proposition 2.6, la suite $(F_1^{n,k}, F_2^{n,k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers (F_1^k, F_2^k) dans $L^1([0, T]) \times L^1([0, T])$: par unicité de la limite on en déduit que $(F_1^{n,k}, F_2^{n,k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge fortement vers (F_1^k, F_2^k) dans $L^1([0, T]) \times L^1([0, T])$. Grâce à une extraction diagonale, on peut ensuite trouver une sous-suite $(f_1^{\Lambda(n)}, f_2^{\Lambda(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $(F_1^{\Lambda(n),k}, F_2^{\Lambda(n),k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$ (fortement dans $L^1([0, T]) \times L^1([0, T])$) ; on extrait finalement de cette dernière une autre sous-suite convergeant presque partout vers (F_1^k, F_2^k) sur $]0, T[$. \diamond

Lemme 2.4 Soit $(f_{1,in}, f_{2,in}) \in L_{2,r}^1 \times L_2^1 \cap L \log L \times L_r \log L_r$ vérifiant $f_{1,in} \geq 0, f_{2,in} \geq 0$ p.p., $T \in \mathbb{R}^{+*}$, $(f_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites extraites obtenues dans le Lemme 2.3. Alors pour tout $t \in [0, T]$,

$$f_1^n(t, \cdot, \cdot) \rightharpoonup f_1(t, \cdot, \cdot) \quad \text{pour la topologie } \sigma\left(L^1(\mathbb{R}^3 \times [r_{\min}, r_{\max}]), L^\infty(\mathbb{R}^3 \times [r_{\min}, r_{\max}])\right),$$

et

$$f_2^n(t, \cdot) \rightharpoonup f_2(t, \cdot) \quad \text{pour la topologie } \sigma\left(L^1(\mathbb{R}^3), L^\infty(\mathbb{R}^3)\right).$$

Preuve du Lemme 2.4. La preuve étant similaire pour $(f_1^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, considérons une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $h_n : \mathbb{R}^+ \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$, où E est un sous ensemble de \mathbb{R}^d , vérifiant

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \int_E h_n(t, y) dy \right\} < +\infty, \quad (2.92)$$

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E h_n(t, y) |\ln(h_n(t, y))| dy \leq K, \quad (2.93)$$

et

$$\forall t \in [0, T], \quad h_n(t, \cdot) \rightarrow h(t, \cdot) \text{ dans } \sigma \left(L^1(E), \mathcal{C}_c(E) \right), \quad (2.94)$$

où $h \in L^1(E, (1 + |y|)dy)$. Les suites $(f_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la condition (2.92) d'après (2.57) et (2.58) (avec $E = \mathbb{R}^+ \times [r_{\min}, r_{\max}]$ ou $E = \mathbb{R}^+$ respectivement), la condition (2.93) d'après (2.68) et (2.69), et la condition (2.94) qui vient d'être prouvée dans le Lemme 2.3. Soit $\varphi \in L^\infty(E)$ et $t \in [0, T]$; montrons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E h_n(t, y) \varphi(y) dy = \int_E h(t, y) \varphi(y) dy. \quad (2.95)$$

Il existe une suite $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}_c(E)$ et une constante A telle que

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \|\varphi_p\|_\infty \leq A,$$

et $\varphi_p \rightarrow \varphi$ presque partout. Soit $\eta > 0$; d'après le Théorème 2.4, il existe un ensemble F_η tel que $|F_\eta^c| \leq \eta$ et $\varphi_p \rightarrow \varphi$ uniformément sur F_η . On effectue le découpage suivant, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_E h_n(t, y) \varphi(y) dy - \int_E h(t, y) \varphi(y) dy \right| \\ & \leq \left| \int_E (h_n(t, y) - h(t, y)) (\varphi(y) - \varphi_p(y)) dy \right| + \left| \int_E (h_n(t, y) - h(t, y)) \varphi_p(y) dy \right|. \end{aligned} \quad (2.96)$$

D'après (2.94),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_E (h_n(t, y) - h(t, y)) \varphi_p(y) dy \right| = 0$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$, et on majore l'autre terme de (2.96) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \left| \int_E (h_n(t, y) - h(t, y)) (\varphi(y) - \varphi_p(y)) dy \right| \\ & \leq \left| \int_{F_\eta} (h_n(t, y) - h(t, y)) (\varphi(y) - \varphi_p(y)) dy \right| + \left| \int_{F_\eta^c} (h_n(t, y) - h(t, y)) (\varphi(y) - \varphi_p(y)) dy \right| \\ & \leq \|(\varphi - \varphi_p) \mathbb{1}_{F_\eta}\|_\infty \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \|h_n\|_{L^1(E)} + \|h\|_{L^1(E)} \right) \\ & \quad + (\|\varphi\|_\infty + A) \left(\left| \int_{F_\eta^c} h_n(t, y) dy \right| + \left| \int_{F_\eta^c} h(t, y) dy \right| \right). \end{aligned}$$

Or, pour tout $R > 1$, on a grâce à (2.93) :

$$\begin{aligned} \left| \int_{F_\eta^C} h_n(t, y) dy \right| &\leq \frac{1}{\ln(R)} \left| \int_{F_\eta^C} h_n(t, y) \ln(h_n(t, y)) \mathbf{1}_{\{y \in E / h_n(t, y) \geq R\}} dy \right| \\ &\quad + \left| \int_{F_\eta^C} h_n(t, y) \mathbf{1}_{\{y \in E / 0 \leq h_n(t, y) \leq R\}} dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\ln(R)} K + R\eta, \end{aligned}$$

et comme $h \in L^1(E)$, alors

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \int_{F_\eta^C} h(t, y) dy \right| = 0.$$

Soit $\theta > 0$. En choisissant d'une part $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|(\varphi - \varphi_p) \mathbf{1}_{F_\eta}\|_\infty \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \|h_n\|_{L^1(E)} + \|h\|_{L^1(E)} \right) \leq \frac{\theta}{4},$$

n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$

$$\left| \int_E (h_n(t, y) - h(t, y)) \varphi_p(y) dy \right| \leq \frac{\theta}{4},$$

et d'autre part $R > 1$ tel que

$$(\|\varphi\|_\infty + A) \left(\frac{K}{\ln(R)} \right) \leq \frac{\theta}{4},$$

et η tel que

$$(\|\varphi\|_\infty + A) \left(R\eta + \left| \int_{F_\eta^C} h(t, y) dy \right| \right) \leq \frac{\theta}{4},$$

on obtient finalement

$$\left| \int_E (h_n(t, y) - h(t, y)) \varphi(y) dy \right| \leq \theta.$$

On a donc prouvé (2.95). \diamond

Nous aurons également besoin du Lemme suivant :

Lemme 2.5 Soit $(f_{1,in}, f_{2,in}) \in (L_{2,r}^1 \cap L_r \log L_r) \times (L_2^1 \cap L \log L)$, avec $f_{1,in} \geq 0$, $f_{2,in} \geq 0$ presque partout, et (f_1, f_2) le couple de solutions défini à la Proposition 2.6. Alors il existe des constantes C_1 et C_2 telles que pour tout $t \geq 0$, pour presque tout $v \in \mathbb{R}^3$ et presque tout $r \in [r_{min}, r_{max}]$,

$$f_1(t, v, r) \geq f_{1,in}(v, r) \exp(-C_1(1 + |v|)t), \quad (2.97)$$

et

$$f_2(t, v) \geq f_{2,in}(t, v) \exp(-C_2(1 + |v|)t). \quad (2.98)$$

En particulier, si $f_{1,in} > 0$ et $f_{2,in} > 0$ p.p, alors pour tout $t \geq 0$, $f_1(t, \cdot, \cdot) > 0$ et $f_2(t, \cdot) > 0$ p.p.

Preuve du Lemme 2.5. D'après (2.21) et (2.22), f_1 et f_2 vérifient au sens faibles les équations suivantes :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}(t, v_1, r) = R_1^+(f_1, f_2)(t, v_1, r) - f_1(t, v_1, r) \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v_2) \pi |v_1 - v_2| (r + \varrho)^2 dv_2,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial t}(t, v_2) = & R_2^+(f_1, f_2) + Q^+(f_2, f_2) - f_2(t, v_2) \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, v_1, r) \pi |v_1 - v_2| (r + \varrho)^2 dv_1 \\ & - f_2(t, v_2) \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_2(t, v_*) b(|v_2 - v_*|, \cos(\chi)) |v_2 - v_*|^\delta d\omega dv_*, \end{aligned}$$

où $R_1^+(f_1, f_2)$, $Q^+(f_2, f_2)$ et $R_2^+(f_1, f_2)$ sont des termes positifs correspondant aux termes de gain des opérateurs $R_1(f_1, f_2)$, $Q(f_2, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$. De plus, d'après (2.72), (2.73) et (2.81), on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v_2) \pi |v_1 - v_2| (r + \varrho)^2 dv_2 &\leq Cst (1 + |v_1|) M_2, \\ \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, v_1, r) \pi |v_1 - v_2| (r + \varrho)^2 dv_1 &\leq Cst (1 + |v_2|) M_1, \end{aligned}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_2(t, v_*) b(|v_2 - v_*|, \cos(\chi)) |v_2 - v_*|^\delta dv_* \leq Cst (1 + |v_2|) M_2 \Theta,$$

où Θ est défini par (2.81). On en déduit donc les minoration (2.97) et (2.98). \diamond

Proposition 2.9 Soit $(f_{1,in}, f_{2,in}) \in (L_{2,r}^1 \cap L_r \log L_r) \times (L_2^1 \cap L \log L)$, avec $f_{1,in} > 0$, $f_{2,in} > 0$. Soit (f_1, f_2) le couple de solutions défini à la Proposition 2.6. Alors pour tout $T > 0$,

$$(f_1, f_2) \in L^\infty([0, T], L_r \log L_r \cap L \log L),$$

et (f_1, f_2) vérifie l'inégalité d'entropie :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{H}(f_1, f_2)(t) \leq \mathcal{H}(f_{1,in}, f_{2,in}).$$

Preuve de la Proposition 2.9. Soient $(f_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites extraites dans le Lemme 2.4 et $t \in \mathbb{R}^+$. En appliquant l'inégalité (2.65) avec $x = f_2$ et $y = f_2^n$, puis $x = f_1$ et $y = f_1^n$, on obtient :

$$f_2^n \ln(f_2^n) - f_2 \ln(f_2) \geq (1 + \ln(f_2)) (f_2^n - f_2), \quad (2.99)$$

et

$$f_1^n \ln(f_1^n) - f_1 \ln(f_1) \geq (1 + \ln(f_1)) (f_1^n - f_1). \quad (2.100)$$

Pour $\eta > 0$, on introduit les sous-ensembles

$$A_\eta = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 / f_2(t, v) \in \left[\eta, \frac{1}{\eta} \right] \right\},$$

et

$$B_\eta = \left\{ (v, r) \in \mathbb{R}^3 \times [r_{min}, r_{max}] / f_1(t, v, r) \in \left[\eta, \frac{1}{\eta} \right] \right\}.$$

Les fonctions $f_1(t, \cdot, \cdot) \ln(f_1)(t, \cdot, \cdot)$ et $f_2(t, \cdot) \ln(f_2)(t, \cdot)$ sont intégrables sur B_η et A_η respectivement. En posant

$$\Upsilon_n^1(t, \eta) = \int_{\mathbb{R}^3} [1 + \ln(f_2(t, v))] [f_2^n(t, v) - f_2(t, v)] \mathbb{1}_{A_\eta}(v) dv,$$

et

$$\Upsilon_n^2(t, \eta) = \iint_{\mathbb{R}^3 \times [r_{min}, r_{max}]} [1 + \ln(f_1(t, v, r))] [f_1^n(t, v, r) - f_1(t, v, r)] \mathbb{1}_{B_\eta}(v, r) dv dr,$$

on a d'après (2.99) et (2.100) :

$$\int_{A_\eta} f_2^n(t, v) \ln(f_2^n(t, v)) dv \geq \int_{A_\eta} f_2(t, v) \ln(f_2(t, v)) dv + \Upsilon_n^1(t, \eta), \quad (2.101)$$

et

$$\iint_{B_\eta} f_1^n(t, v) \ln(f_1^n(t, v)) dv dr \geq \iint_{B_\eta} f_1(t, v, r) \ln(f_1(t, v, r)) dv dr + \Upsilon_n^2(t, \eta), \quad (2.102)$$

pour tout $t \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} & \int_{A_\eta} f_2^n(t, v) \ln(f_2^n(t, v)) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(t, v) \ln(f_2^n(t, v)) dv - \int_{A_\eta^C} f_2^n(t, v) \ln(f_2^n(t, v)) dv \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} f_2^n(t, v) \ln(f_2^n(t, v)) dv + \int_{A_\eta^C \cap \{v \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq f_2^n(v) \leq 1\}} f_2^n(t, v) |\ln(f_2^n(t, v))| dv, \end{aligned} \quad (2.103)$$

et

$$\begin{aligned} \iint_{B_\eta} f_1^n(t, v) \ln(f_1^n(t, v)) dv dr &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1^n(t, v, r) \ln(f_1^n(t, v, r)) dv dr \\ &\quad + \iint_{B_\eta^C \cap \{(v, r) / 0 \leq f_1^n(v, r) \leq 1\}} f_1^n(t, v, r) |\ln(f_1^n(t, v, r))| dv dr. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Ainsi, on déduit des inégalités (2.101), (2.102), (2.103), (2.104) et de l'inégalité d'entropie (2.61) sur (f_1^n, f_2^n) :

$$\begin{aligned} & \iint_{B_\eta} f_1(t, v, r) \ln(f_1(t, v, r)) dv dr + \int_{A_\eta} f_2(t, v) \ln(f_2(t, v)) dv \\ &\leq H(f_{1,in}, f_{2,in}) + u_n - \Upsilon_n^1(t, \eta) - \Upsilon_n^2(t, \eta) \\ &\quad + \iint_{B_\eta^C \cap \{(v, r) \in \mathbb{R}^3 \times [r_{min}, r_{max}] / 0 \leq f_1^n(v, r) \leq 1\}} f_1^n(t, v, r) |\ln(f_1^n(t, v, r))| dv dr \\ &\quad + \int_{A_\eta^C \cap \{v \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq f_2^n(v) \leq 1\}} f_2^n(t, v) |\ln(f_2^n(t, v))| dv. \end{aligned} \quad (2.105)$$

De plus, grâce à l'inégalité (2.66), on a

$$\begin{aligned} & \int_{A^{\eta C} \cap \{v \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq f_2^n(t, v) \leq 1\}} f_2^n(t, v) |\ln(f_2^n(t, v))| dv \\ & \leq \int_{A^{\eta C}} \exp(-|v|) dv + \int_{A^{\eta C} \cap \{v \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq f_2^n(t, v) \leq 1\}} f_2^n(t, v) (|v| + 1) dv. \end{aligned}$$

Or, pour tout $R > 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \int_{A^{\eta C} \cap \{v \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq f_2^n(v) \leq 1\}} f_2^n(t, v) (1 + |v|) dv \\ & \leq \int_{A^{\eta C} \cap \{v \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq f_2^n(v) \leq 1\} \cap \{|v| \leq R\}} f_2^n(t, v) (1 + |v|) dv \\ & \quad + \int_{A^{\eta C} \cap \{v \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq f_2^n(v) \leq 1\} \cap \{|v| \geq R\}} f_2^n(t, v) (1 + |v|) \frac{|v|}{R} dv \\ & \leq \int_{A^{\eta C} \cap \{|v| \leq R\}} (1 + |v|) dv + \frac{Cst}{R} M_2. \end{aligned} \quad (2.106)$$

De façon analogue, on obtient pour tout $R > 0$:

$$\begin{aligned} & \iint_{B^{\eta C} \cap \{(v, r) \in \mathbb{R}^3 \times [r_{min}, r_{max}] / 0 \leq f_1^n(v, r) \leq 1\}} f_1^n(t, v, r) |\ln(f_1^n(t, v, r))| dv dr \\ & \leq \iint_{B^{\eta C} \cap \{|v| \leq R\}} (1 + |v|) dv dr + \frac{Cst}{R} M_1 + \iint_{B^{\eta C}} \exp(-|v|) dr dv. \end{aligned} \quad (2.107)$$

On déduit alors de (2.105), (2.106) et (2.107) :

$$\begin{aligned} & \iint_{B^{\eta}} f_1(t, v, r) \ln(f_1(t, v, r)) dv dr + \int_{A^{\eta}} f_2(t, v) \ln(f_2(t, v)) dv \\ & \leq H(f_{1,in}, f_{2,in}) + u_n - \Upsilon_n^1(t, \eta) - \Upsilon_n^2(t, \eta) + \frac{Cst}{R} \\ & \quad + \int_{A^{\eta C}} (1 + |v|) \mathbb{1}_{\{|v| \leq R\}} dv + \int_{A^{\eta C}} \exp(-|v|) dv \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$+ \iint_{B^{\eta C}} (1 + |v|) \mathbb{1}_{\{|v| \leq R\}} dv dr + \iint_{B^{\eta C}} \exp(-|v|) dr dv. \quad (2.109)$$

Le Lemme 2.4 nous assure que pour tout $\eta > 0$, pour tout $T > 0$ et tout $t \in [0, T]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Upsilon_n^1(t, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Upsilon_n^2(t, \eta) = 0.$$

De plus, le Lemme 2.5 nous assure que

$$|\{f_1 = 0\}| = |\{f_2 = 0\}| = 0,$$

et comme la fonction $v \mapsto \exp(-|v|)$ est intégrable sur \mathbb{R}^3 , on a donc

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{A^{\eta C}} \exp(-|v|) dv = 0,$$

et

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \iint_{B^{\eta C}} \exp(-|v|) dr dv = 0.$$

Par passage à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ on déduit donc de (2.109) que pour tout $\eta > 0$, pour tout $t \in [0, T]$ et tout $R > 0$:

$$\begin{aligned} & \iint_{B^\eta} f_1(t, v, r) \ln(f_1(t, v, r)) dv dr + \int_{A^\eta} f_2(t, v) \ln(f_2(t, v)) dv \\ & \leq H(f_{2,in}, f_{1,in}) + \frac{1}{R} (M_1 + M_2) + \int_{A^{\eta C}} (1 + |v|) \mathbb{1}_{\{|v| \leq R\}} dv \\ & \quad + \iint_{B^{\eta C}} (1 + |v|) \mathbb{1}_{\{|v| \leq R\}} dv dr. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Nous pouvons déjà en déduire que pour tout $t \in [0, T]$, $f_2(t, \cdot) \in L \log L$ et que $f_1(t, \cdot, \cdot) \in L_r \log L_r$. En effet la relation (2.110) permet d'obtenir en particulier une majoration de $\iint_{B^\eta} f_1(t, v, r) \ln(f_1(t, v, r)) dv dr + \int_{A^\eta} f_2(t, v) \ln(f_2(t, v)) dv$ indépendante de t et de η :

$$\begin{aligned} & \iint_{B^\eta} f_1(t, v, r) \ln(f_1(t, v, r)) dv dr + \int_{A^\eta} f_2(t, v) \ln(f_2(t, v)) dv \\ & \leq H(f_{1,in}, f_{2,in}) + \frac{Cst}{R} (M_1 + M_2) + 2 \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|) \mathbb{1}_{\{|v| \leq R\}} dv. \end{aligned} \quad (2.111)$$

De plus, comme on a

$$\begin{aligned} & \int_{A^\eta} f_2(t, v) |\ln(f_2(t, v))| dv \\ & \leq \int_{A^\eta} f_2(t, v) \ln(f_2(t, v)) dv + 2 \int_{A^\eta \cap \{v \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq f_2(t, v) \leq 1\}} f_2(t, v) |\ln(f_2(t, v))| dv \\ & \leq \int_{A^\eta} f_2(t, v) \ln(f_2(t, v)) dv + 2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} \exp(-|v|) dv + M_2 \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{B^\eta} f_1(t, v, r) |\ln(f_1(t, v, r))| dv dr \\ & \leq \iint_{B^\eta} f_1(t, v, r) \ln(f_1(t, v, r)) dv dr + 2 \left((r_{max} - r_{min}) \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-|v|) dv + M_2 \right), \end{aligned}$$

on déduit de (2.111) qu'il existe une constante C telle que pour tout $\eta > 0$ et pour tout $t \in [0, T]$:

$$\int_{B^\eta} f_1(t, v, r) |\ln(f_1(t, v, r))| dv dr + \int_{A^\eta} f_2(t, v) |\ln(f_2(t, v))| dv \leq C. \quad (2.112)$$

Un passage à la limite lorsque $\eta \rightarrow 0$ dans l'inégalité (2.112) nous permet de déduire que pour tout $t \in [0, T]$, $f_1(t, \cdot, \cdot) \in L_r \log L_r$, $f_2(t, \cdot) \in L \log L$, et par conséquent que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \iint_{B^\eta} f_1(t, v, r) \ln(f_1(t, v, r)) dv dr = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, v, r) \ln(f_1(t, v, r)) dv dr,$$

et

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{A^\eta} f_2(t, v) \ln(f_2(t, v)) dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) \ln(f_2(t, v)) dv.$$

De plus, la fonction $v \mapsto (1 + |v|) \mathbf{1}_{\{|v| \leq R\}}$ étant intégrable sur \mathbb{R}^3 , on déduit par passage à la limite lorsque $\eta \rightarrow 0$ dans (2.110) que pour tout $R > 0$:

$$\mathcal{H}(f_1, f_2)(t) \leq \mathcal{H}(f_{1,in}, f_{2,in}) + \frac{Cst}{R} (M_1 + M_2),$$

puis, par passage à la limite lorsque $R \rightarrow +\infty$, on obtient finalement l'inégalité (2.25). \diamond

Remarque 2.1 Dans [PuW], A. Pulvirenti et Wennberg prouvent que dans le cas de l'équation de Boltzmann spatialement homogène et sous l'hypothèse classique de troncature angulaire de Grad, l'hypothèse d'une donnée initiale positive ou nulle est suffisante pour montrer que la solution est minorée par une maxwellienne et est strictement positive pour $t > 0$. On peut donc espérer pouvoir affaiblir les hypothèses de la Proposition 2.9 et supposer seulement $f_{1,in} \geq 0$ et $f_{2,in} \geq 0$.

2.6 Établissement de la relation de conservation de l'énergie cinétique

Lemme 2.6 Soit a, b deux réels strictement positifs, $\gamma \in [0, 1]$, $s \geq 1$. Alors

$$a^s + b^s \leq (a + b)^s \leq a^s + b^s + 2^s b^{s-\gamma} a^\gamma + 2^s a^{s-\gamma} b^\gamma. \quad (2.113)$$

Preuve du Lemme 2.6. Supposons $0 < a < b$. Alors pour tout $k \geq 1$, $(\frac{a}{b})^k \leq (\frac{a}{b})^\gamma$. De plus, d'après la formule du binôme généralisée, on a

$$\begin{aligned} (a + b)^s &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{s}{k} a^k b^{s-k} \\ &\leq b^s + \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma b^s \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{s}{k} \\ &\leq b^s + 2^s b^{s-\gamma} a^\gamma. \end{aligned}$$

On obtient ensuite (2.113) en symétrisant. \diamond

Pour $\alpha > 0$, et $(k, h) \in L_{2\alpha, r} \times L_{2\alpha}$, on pose

$$M_\alpha(k, h) = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^2)^\alpha \left((\varepsilon_m)^\alpha h(v) + \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left(\frac{r}{r_{min}} \right)^{3\alpha} k(v, r) dr \right) dv.$$

Lemme 2.7 Soit $s \geq 1$, $(k, h) \in L_{2s, r} \times L_{2s}$, Q , R_1 et R_2 des opérateurs d'expressions données par (2.5), (2.8) et (2.9), dans lesquels les sections de collisions B et q vérifient respectivement

$$\int_{\mathbb{S}^2} B(|v - v_*|, \cos(\chi)) d\sigma \leq \kappa_1 (1 + |v| + |v_*|), \quad (2.114)$$

et

$$\forall r \in [r_{min}, r_{max}], \quad \int_{\mathbb{S}^2} q(|v_1 - v_2|, |\omega \cdot (v_1 - v_2)|, r) d\omega \leq \kappa_2(1 + |v_1| + |v_2|). \quad (2.115)$$

Alors il existe une constante $C(s) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 + |v|^2\right)^s ((\varepsilon_m)^s Q(h, h)(v) + (\varepsilon_m)^s R_2(k, h)(v, r)) dv \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left(1 + |v|^2\right)^s \left(\frac{r}{r_{min}}\right)^{3s} R_1(k, h)(v, r) dr dv \\ & \leq C(s) M_1(k, h) M_s(k, h). \end{aligned} \quad (2.116)$$

Preuve du Lemme 2.7. Commençons par majorer $\int_{\mathbb{R}^3} \left(1 + |v|^2\right)^s Q(h, h)(v) dv$. Grâce à (2.7), on peut écrire ce terme sous la forme

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 + |v|^2\right)^s Q(h, h)(v) dv \\ & = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left\{ \left(1 + |v'_*|^2\right)^s + \left(1 + |v'|^2\right)^s - \left(1 + |v_*|^2\right)^s - \left(1 + |v|^2\right)^s \right\} \\ & \quad \times B(|v - v_*|, \cos(\chi)) h(v) h(v_*) d\omega dv dv_*. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.6 et l'expression de (v', v'_*) donnée sous la forme (2.6), on a

$$\begin{aligned} & \left(1 + |v'_*|^2\right)^s + \left(1 + |v'|^2\right)^s \\ & \leq \left(1 + |v'_*|^2 + 1 + |v'|^2\right)^s \\ & \leq \left(1 + |v_*|^2 + 1 + |v|^2\right)^s \\ & \leq \left(1 + |v_*|^2\right)^s + \left(1 + |v|^2\right)^s + 2^s \left(1 + |v_*|^2\right)^{s-\gamma} \left(1 + |v|^2\right)^\gamma \\ & \quad + 2^s \left(1 + |v_*|^2\right)^\gamma \left(1 + |v|^2\right)^{s-\gamma}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

et on obtient, par symétrie entre v_* et v , en prenant $\gamma = 1/2$ dans (2.117), et d'après l'hypothèse (2.114) :

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_m)^s \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 + |v|^2\right)^s Q(f_2, f_2)(t, v) dv \\ & \leq (\varepsilon_m)^s 2^{s-1} \kappa_1 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v| + |v_*|) \left(1 + |v_*|^2\right)^{s-1/2} \left(1 + |v|^2\right)^{1/2} h(v) h(v_*) dv dv_* \\ & \leq K_1(s) M_1(k, h) M_s(k, h). \end{aligned} \quad (2.118)$$

Ensuite, en utilisant la propriété (2.16), on peut écrire

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^2)^s \left\{ (\varepsilon_m)^s R_2(k, h)(v) + \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^{3s} R_1(k, h)(v, r) dr \right\} dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} q(|v_1 - v_2|, |\omega \cdot (v_1 - v_2)|, r) \\
&\quad \times \left\{ (\varepsilon_m) (1 + |v'_2|^2)^s + \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^{3s} (1 + |v'_1|^2)^s - \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^{3s} (1 + |v_1|^2)^s - (\varepsilon_m)^s (1 + |v_2|^2)^s \right\} \\
&\quad \times k(v_1, r) h(v_2) dr d\omega dv_1 dv_2.
\end{aligned}$$

Or, d'après la relation (2.15), on a

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon_m)^s (1 + |v'_2|^2)^s + \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^{3s} (1 + |v'_1|^2)^s \\
&\leq \left(\varepsilon_m + \varepsilon_m |v'_2|^2 + \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^3 + \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^3 |v'_1|^2 \right)^s \\
&\leq \left(\varepsilon_m + \varepsilon_m |v_2|^2 + \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^3 + \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^3 |v_1|^2 \right)^s \\
&\leq \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^{3s} (1 + |v_1|^2)^s + (\varepsilon_m)^s (1 + |v_2|^2)^s \\
&\quad + 2^s \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^{3\gamma} (\varepsilon_m)^{s-\gamma} (1 + |v_1|^2)^\gamma (1 + |v_2|^2)^{s-\gamma} \\
&\quad + 2^s \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^{3(s-\gamma)} (\varepsilon_m)^\gamma (1 + |v_1|^2)^{s-\gamma} (1 + |v_2|^2)^\gamma. \tag{2.119}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le Lemme (2.113) en prenant $\gamma = \frac{1}{2}$ et d'après l'hypothèse (2.115), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^2)^s \left\{ (\varepsilon_m)^s R_2(k, h)(v) + \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^{3s} R_1(k, h)(v, r) dr \right\} dv \\
&\leq \sqrt{32^s} \kappa_2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m}} \\
&\quad \times \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^3} (\varepsilon_m)^s h(v) (1 + |v|^2)^s dv \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^3 k(v, r) (1 + |v|^2) dr dv \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{\mathbb{R}^3} (\varepsilon_m) h(v) (1 + |v|^2) dv \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left(\frac{r}{r_{\min}} \right)^{3s} k(v, r) (1 + |v|^2)^s dr dv \right) \right\} \tag{2.120}
\end{aligned}$$

$$\leq K_2(s) M_1(h, k) M_s(h, k). \tag{2.121}$$

On obtient alors (2.116). \diamond

Proposition 2.10 *On suppose qu'il existe $s > 1$ tel que $(f_{1,in}, f_{2,in}) \in L^1_{2s,r} \times L^1_{2s}$, avec $f_{1,in} \geq 0, f_{2,in} \geq 0$. Soit $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite extraite obtenue à la Proposition 2.6, solution*

de (2.36), de conditions initiales données par (2.41)-(2.42). Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f_1^n(t, \cdot, \cdot) \in L^1_{2s,r}$ et $f_2^n(t, \cdot) \in L^1_{2s}$. De plus, on peut extraire une sous-suite de $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, encore notée $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge faiblement vers (f_1, f_2) dans $L^1_{t,2s,r} \times L^1_{t,2s}$, et le couple (f_1, f_2) vérifie l'équation de conservation de l'énergie (2.13).

Preuve de la Proposition 2.10. Comme (f_1^n, f_2^n) est solution de (2.36), on peut écrire

$$M_s(f_1^n, f_2^n)(t) := M_s(f_1^n(t, \cdot, \cdot), f_2^n(t, \cdot))$$

sous la forme

$$\begin{aligned} & M_s(f_1^n, f_2^n)(t) \\ &= M_s(f_{1,in}, f_{2,in}) + \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \|(f_1^n, f_2^n)\|_c(t)} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t (1 + |v|^2)^s \left((\varepsilon_m)^s Q^n(f_2^n, f_2^n)(\tau, v) \right. \\ & \quad \left. + (\varepsilon_m)^s R_2^n(f_1^n, f_2^n)(\tau, v) + \int_{r_{min}}^{r_{max}} \left(\frac{r}{r_{min}} \right)^{3s} R_1^n(f_1^n, f_2^n)(\tau, v, r) \right) dr dv d\tau. \end{aligned}$$

Les sections de collisions des opérateurs Q^n , R_1^n , R_2^n vérifiant les conditions (2.114) et (2.115), on déduit du Lemme 2.7 que :

$$M_s(f_1^n, f_2^n)(t) \leq M_s(f_{1,in}, f_{2,in}) + \int_0^t C(s) M_1(f_1^n, f_2^n)(\tau) M_s(f_1, f_2)(\tau) d\tau.$$

De plus, d'après (2.57) et (2.58), on a

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}^+} M_1(f_1^n, f_2^n)(\tau) \leq M_1 + M_2,$$

et par suite on obtient :

$$M_s(f_1^n, f_2^n)(t) \leq M_s(f_{1,in}, f_{2,in}) + C(s) (M_1 + M_2) \int_0^t M_s(f_1, f_2)(\tau) d\tau.$$

D'après le Lemme de Gronwall, on en déduit alors qu'il existe une constante $K(s)$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$M_s(f_1^n, f_2^n)(t) \leq M_s(f_{1,in}, f_{2,in}) \exp(K(s)t).$$

Par conséquent, pour tout $T > 0$, la suite $(f_1^n, f_2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty([0, T], L^1_{2s} \times L^1_{2s,r})$. Grâce à cette estimation, l'égalité (2.46) nous donne finalement la conservation de l'énergie (2.13) par passage à la limite. \diamond

Remarque 2.2 Dans le cas de l'équation de Boltzmann spatialement homogène

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Q(f, f),$$

où

$$Q(f, f)(t, v) = \int_{\mathbb{R}^3} (f' f'_* - f f_*) |v - v_*|^\delta b \left(\frac{|(v - v_*) \cdot \omega|}{|v - v_*|} \right) d\omega dv_*,$$

avec $\delta \in]0, 1]$ et sous l'hypothèse de troncature angulaire faible de Grad pour le noyau b (i.e. $b \in L^1([-1, 1])$), Mischler et Wennberg [MiW] ont prouvé que l'hypothèse

$$f_{in} \in L^1_2 \quad (2.122)$$

sur la donnée initiale f_{in} était suffisante pour prouver la relation de conservation de l'énergie

$$\forall t \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) |v|^2 dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_{in}(v) |v|^2 dv. \quad (2.123)$$

Pour cela, ils montrent l'existence d'un instant $t_0 > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t_0, v) |v|^{2+\delta/2} dv < +\infty.$$

Ils en déduisent alors, de la même façon que Desvillettes dans [De2], que pour tout $t' > 0$, $s' > 2$,

$$\sup_{t \geq t'} \int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) |v|^{s'} dv \leq C_{t', s'}.$$

Par ailleurs, dans [Lu], la relation de conservation de l'énergie (2.123) est prouvée de façon différente à partir de (2.122) (toujours sous l'hypothèse de troncature angulaire de Grad sur le noyau b), en utilisant le fait que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \ln(1 + \epsilon |v|^2) = |v|^2,$$

et en montrant la relation :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) |v|^2 dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_0(t, v) |v|^2 dv + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} K_\epsilon(v, v_*) f(\tau, v) f(\tau, v_*) dv_* dv,$$

où

$$K_\epsilon(v, v_*) = \frac{1}{2\epsilon} \int_{\mathbb{S}^2} |v - v_*|^\delta b \left(\frac{|(v - v_*) \cdot \omega|}{|v - v_*|} \right) \ln \left(1 + \frac{\epsilon^2 |v'|^2 |v'_*|^2}{1 + \epsilon^2 (|v'|^2 + |v'_*|^2)} \right) d\omega.$$

On peut donc espérer pouvoir affaiblir les hypothèses de la Proposition 2.10, et supposer seulement $(f_{1,in}, f_{2,in}) \in L^1_{2,r} \times L^1_2$. Cependant, nous nous cherchons pas à le faire dans ce travail, car dans l'asymptotique que nous considérons au Chapitre 5, nous aurons de toute façon besoin de supposer que les données initiales possèdent un moment d'ordre 4 borné.

Chapitre 3

Simulation numérique du couplage Boltzmann/Boltzmann

Sommaire

3.1	Introduction	118
3.2	Modèle mathématique	118
3.3	Méthode numérique	120
3.3.1	Principe général	121
3.3.2	Simulation de $Q_{sd}(f_2, f_2)$ par une méthode de Bird	123
3.3.3	Simulation de $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$ par une méthode de Nanbu	125
3.4	Conditions sur le pas de temps et coût de simulation	130
3.4.1	Condition sur Δt dans le cas d'un système homogène en espace	130
3.4.2	Condition sur Δt dans le cas d'un système inhomogène en espace	132
3.4.3	Nombre de paires de collision	133
3.5	Exemples de simulations numériques du couplage homogène en espace	134
3.5.1	Cas des opérateurs à section de sphères dures	135
3.5.2	Validation du code	137
3.6	Conclusion	144

3.1 Introduction

Nous présentons dans ce Chapitre la simulation numérique de l'évolution d'un mélange composé de gaz et de particules de poussière, basée sur le couplage de type Boltzmann/Boltzmann introduit au Chapitre 1. Nous adoptons ici le modèle dit de réflexion diffuse : la vitesse relative post-collisionnelle entre les deux particules est obtenue par réflexion diffuse sur le plan tangent à la particule de poussière au point d'impact. Par ailleurs, nous nous restreignons à une distribution de particules de poussière de rayons identiques.

Nous avons pour cela utilisé un code de type DSMC (Direct Simulation Monte-Carlo) développé au laboratoire LSET du CEA de Saclay dans le cadre des mélanges gazeux, que nous avons adapté au mélange gaz-poussière. La méthode DSMC, développée au cours des années 70 par G.A. Bird [Bi1] est basée sur un splitting de l'équation de Boltzmann entre une phase de transport des particules et une phase "terme source" se traduisant pas une simulation probabiliste des collisions entre celles-ci. La modification apportée à ce code pour l'adapter à un mélange gaz-poussière réside principalement dans la gestion des collisions entre les particules de poussière et les molécules. L'application de ce code aux conditions relatives au réacteur ITER, c'est-à-dire sous l'hypothèse d'une grande différence de taille entre les particules de poussière et les molécules d'une part, et d'une grande différence de densité en nombre entre ces deux espèces d'autre part, soulève des difficultés de simulation que nous allons mettre en évidence dans ce Chapitre.

Nous commençons par présenter les équations de notre modèle dans la section 3.2, puis nous explicitons dans la section 3.3 la méthode numérique utilisée pour simuler ces équations. Nous exposons dans la section 3.4 les difficultés de simulation liées à la grande différence de taille et de densité entre les deux espèces. Nous présentons ensuite dans la section 3.5 quelques résultats de simulation montrant l'évolution des vitesses macroscopiques et des températures cinétiques des deux espèces dans le cas homogène en espace. En particulier, nous proposons dans la section 3.5.2 de valider notre méthode numérique en l'appliquant aux opérateurs de collisions $R_1^{dm}(f_1, f_2)$ et $R_2^{dm}(f_1, f_2)$ à section pseudo-maxwellienne. En effet, il est possible pour ce modèle d'obtenir formellement dans le cas homogène en espace des expressions explicites décrivant l'évolution des vitesses macroscopiques et des températures cinétiques, que l'on peut alors comparer avec les résultats obtenus numériquement.

3.2 Modèle mathématique

Le modèle étudié s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_1 = R_1(f_1, f_2), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_2 = R_2(f_1, f_2) + Q_{sd}(f_2, f_2), \quad (3.2)$$

dans lequel $f_1 := f_1(t, x, v)$ représente la densité de répartition des grains de poussière et $f_2 := f_2(t, x, v)$ la densité de répartition des molécules du gaz, $t \in \mathbb{R}^+$ représente le

temps, $v \in \mathbb{R}^3$ la vitesse et $x \in \Omega$ la position. Le domaine de l'espace Ω , évidemment borné pour pouvoir introduire ici un maillage spatial, est par ailleurs supposé quelconque. En particulier, nous n'introduisons pas dans ce Chapitre de conditions aux limites particulières sur son bord $\partial\Omega$. Nous noterons $f_{1,in}$ et $f_{2,in}$ les données initiales : pour $i = 1, 2$, on a

$$f_i(0, x, v) = f_{i,in}(x, v).$$

Les collisions entre molécules n'étant pas le point central de notre étude, nous avons fait l'hypothèse simplificatrice que la section efficace de collision entre celles-ci était de type sphères dures. L'opérateur de collision entre les molécules $Q_{sd}(f_2, f_2)$ est alors donné par

$$\begin{aligned} Q_{sd}(f_2, f_2)(t, x, v) \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_2(t, x, v') f_2(t, x, v'_*) - f_2(t, x, v) f_2(t, x, v_*)] 4\pi \varrho^2 |v - v_*| \frac{d\sigma}{4\pi} dv_*, \end{aligned} \quad (3.3)$$

où ϱ est le rayon des molécules de gaz, et

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \quad (3.4)$$

$$v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma. \quad (3.5)$$

Les opérateurs $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$ correspondent aux collisions entre particules de poussière et molécules. Le modèle que nous nous proposons d'étudier dans ce Chapitre correspond aux opérateurs de réflexion diffuse avec section de sphères dures $R_1^d(f_1, f_2)$ et $R_2^d(f_1, f_2)$, donnés sous forme faible par

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v) \varphi(v) dv = (r_p + \varrho)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [\varphi(v_1'') - \varphi(v_1)] f_1(t, x, v_1) f_2(t, x, v_2) \\ \times [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) > 0\}} h_n(w) dn dw dv_2 dv_1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} R_2^d(f_1, f_2)(t, x, v) \varphi(v) dv = (r_p + \varrho)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [\varphi(v_2'') - \varphi(v_2)] f_1(t, x, v_1) f_2(t, x, v_2) \\ \times [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) > 0\}} h_n(w) dn dw dv_1 dv_2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

pour toute fonction test φ , dans lesquels r_p est le rayon des particules de poussière, h_n la densité de probabilité d'expression

$$h_n(w) = \frac{2\beta^4}{\pi} (n \cdot w) \exp(-\beta^2 |w|^2) \mathbb{1}_{\{n \cdot w \geq 0\}}, \quad (3.8)$$

et β une constante donnée par

$$\beta = \sqrt{\frac{m_2}{2k_B T_{surf}}},$$

dans laquelle m_2 est la masse d'une molécule et T_{surf} est la température de surface des particules de poussière, supposée constante. Nous renvoyons au Chapitre 1 pour plus de

détails concernant cette modélisation. Les vitesses post-collisionnelles (v_1'', v_2'') ont pour expression

$$v_1'' = \frac{1}{1 + \varepsilon} (v_1 + \varepsilon v_2 - \varepsilon w), \quad (3.9)$$

$$v_2'' = \frac{1}{1 + \varepsilon} (v_1 + \varepsilon v_2 + w), \quad (3.10)$$

où ε est le rapport de masse entre les molécules et les particules de poussière. Dans la section 3.5.2, nous nous intéressons aux opérateurs de collision R_1^{dm} et R_2^{dm} à section pseudo-maxwellienne donnés sous forme faible par

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} R_1^{dm}(f_1, f_2)(t, v) \varphi(v) dv \\ &= C_m \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [\varphi(v_1'') - \varphi(v_1)] f_1(t, v_1) f_2(t, v_2) h_n(w) dn dw dv_2 dv_1, \end{aligned} \quad (3.11)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} R_2^{dm}(f_1, f_2)(t, v) \varphi(v) dv \\ &= C_m \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [\varphi(v_2'') - \varphi(v_2)] f_1(t, v_1) f_2(t, v_2) h_n(w) dn dw dv_2 dv_1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

où C_m est une constante, et (v_1'', v_2'') est donné par (3.9)–(3.10). Ces opérateurs, qui n'ont pas de signification physique, nous permettront de valider la méthode numérique utilisée.

Par ailleurs, rappelons que l'on suppose, comme au Chapitre 1, que

$$\alpha^\circ = \frac{n_1^\circ}{n_2^\circ} \ll 1, \quad (3.13)$$

où n_1° est l'ordre de grandeur de la densité en nombre de particules de poussière et n_2° celui de la densité en nombre de molécules, et que le rayon des particules et celui des molécules sont tels que

$$\varrho \ll r_p. \quad (3.14)$$

3.3 Méthode numérique

Nous présentons la méthode numérique de type DSMC que nous avons utilisée pour résoudre le couplage d'équations (3.1)–(3.2). Nous présentons dans un premier temps le principe général de la méthode, qui repose sur une approximation particulière des densités f_1 et f_2 et un splitting en temps entre la partie transport et la partie collision de chacune des équations (3.1) et (3.2). Nous détaillons dans un second temps la simulation des opérateurs de collisions $Q_{sd}(f_2, f_2)$, $R_1^d(f_1, f_2)$ (ou $R_1^{dm}(f_1, f_2)$) et $R_2^d(f_1, f_2)$ (ou $R_2^{dm}(f_1, f_2)$). Nous exposons ici les algorithmes numériques de ces méthodes, sans en aborder leur justification probabiliste (nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Lapeyre, Pardoux et Sentis [LP], à [Pe] ou à [PeR2] pour plus de détails concernant ces méthodes). Pour finir, nous présentons les conditions qu'imposent ces méthodes sur le choix des pas de temps et d'espace.

3.3.1 Principe général

3.3.1.1 Approximation particulière

La méthode DSMC, qui repose sur le même principe que les méthodes particulières (cf. Annexe D), consiste à écrire les densités f_1 et f_2 sous la forme d'une combinaison linéaire de masses de Dirac

$$f_i(t, x, v) \simeq \sum_{k=1}^{N_i} \omega_i^k \delta(x - x_i^k(t)) \delta(v - v_i^k(t)),$$

pour $i = 1, 2$. Heuristiquement, cela revient à approcher les distributions réelles en particules de poussière (respectivement en molécules) par un nombre fini N_1 (respectivement N_2) de particules numériques de représentativité (ou poids numérique) ω_1^k (respectivement ω_2^k), de position $x_1^k(t)$ (respectivement $x_2^k(t)$) et de vitesse $v_1^k(t)$ (respectivement $v_2^k(t)$). Les densités initiales $f_{i,in}$ sont approchées par

$$f_{i,in}(x, v) \simeq \sum_{k=1}^{N_i} \omega_i^k \delta(x - x_{i,in}^k) \delta(v - v_{i,in}^k),$$

pour $i = 1, 2$, les positions $x_{1,in}^k$ et les vitesses $v_{1,in}^k$ (respectivement $x_{2,in}^k$ et $v_{2,in}^k$) permettant l'initialisation des positions et vitesses des particules numériques de chaque espèce. Les approximations particulières de $f_{1,in}$ et $f_{2,in}$ sont obtenues par une méthode d'intégration numérique (méthode de Monte-Carlo dans notre cas).

Remarque 3.1 Dans le cas des équations (3.1) et (3.2), la représentativité des particules ne dépend pas du temps, ce qui peut ne pas être le cas en général (cf. Annexe D).

3.3.1.2 Splitting en temps

Les équations (3.1)–(3.2) sont ensuite résolues grâce à un splitting en temps de l'équation entre la partie transport et la partie collision. Celui-ci repose sur le principe suivant : une équation du type

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Af + Bf,$$

A et B étant deux opérateurs, est résolue numériquement en calculant successivement les solutions des équations

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Af,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Bf,$$

sur des pas de temps Δt , et en utilisant comme condition initiale la valeur finale donnée par la résolution de l'équation précédente (on renvoie à [LM] et [De1] pour une présentation des algorithmes de splitting). Cette méthode repose sur une extension aux opérateurs A et B figurant dans l'équation de Boltzmann de la formule de Trotter [Tr], valide pour A et B éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\exp(t(A + B)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{tA}{n}\right) \exp\left(\frac{tB}{n}\right) \right)^n.$$

Dans le cas de l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{Q}(f, f), \quad (3.15)$$

où \mathcal{Q} est un opérateur de collision de Boltzmann de la forme (18), ce splitting consiste donc à discrétiser le temps en n pas de temps Δt et à résoudre successivement l'équation homogène en espace correspondant à la phase de collision

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} &= \mathcal{Q}(\tilde{f}, \tilde{f}), \\ \tilde{f}(0, x, v) &= f_{in}(x, v), \end{aligned} \quad (3.16)$$

sur un intervalle de temps Δt , puis l'équation de transport en utilisant $\tilde{f}(\Delta t, x, v)$ comme condition initiale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f &= 0, \\ f(0, x, v) &= \tilde{f}(\Delta t, x, v). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Le processus est ensuite itéré pour obtenir la solution de l'équation (3.15) sur un intervalle de temps quelconque. Desvilletes et Michler [DeMi] ont montré que sous certaines hypothèses sur le noyau de collision B de l'opérateur \mathcal{Q} le splitting converge, lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, vers la solution de (3.15) (solution au sens des solutions renormalisées définies par Di-Perna-Lions [DiPL]).

Nous appliquons ce procédé au couplage (3.1)–(3.2), en effectuant un splitting en temps entre la partie transport et la partie collision d'une part, et également entre les différents opérateurs de collision d'autre part. Cela revient donc à résoudre successivement les équations

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = R_1(f_1, f_2), \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = R_2(f_1, f_2), \quad (3.19)$$

et

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = Q_{sd}(f_1, f_2), \quad (3.20)$$

(où R_1 et R_2 correspondent respectivement à R_1^d et R_2^d dans le cas d'une section de sphères dures ou à R_1^{dm} et R_2^{dm} pour le modèle à section pseudo maxwellienne) lors de la phase de collision, puis ensuite à résoudre simultanément les équations de transport

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_1 = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_2 = 0. \quad (3.22)$$

Les équations (3.21) et (3.22) sont résolues comme dans les méthodes particulières (cf. Annexe D) en déterminant l'évolution des positions $x_i^k(t)$ et vitesses $v_i^k(t)$, qui sont

solutions du système :

$$\begin{aligned}\frac{dx_i^k}{dt} &= v_i^k, \\ \frac{dv_i^k}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Autrement dit, les particules numériques sont déplacées en ligne droite, leur vitesse restant constante au cours de cette phase.

Pour la résolution des équations (3.18), (3.19) et (3.20) correspondant aux phases de collisions, on procède localement dans chaque maille d'espace c de volume V_c . Pour cela, on remplace les valeurs de f_1 et f_2 en une position x par leur moyenne sur la maille c contenant cette position (ce qui revient à effectuer une convolution de f_1 et f_2 avec la fonction indicatrice de cette maille). En effet, l'idée repose sur le fait que les opérateurs de collision n'agissent pas directement sur les positions des particules, mais uniquement sur leurs vitesses. Ainsi, dans chaque maille, f_1 et f_2 seront localement représentées par

$$f_i(t, v) \simeq \frac{1}{V_c} \sum_{k=1}^{N_{ic}} \omega_i^k \delta(v - v_i^k(t)),$$

où N_{ic} est le nombre de particules numériques de l'espèce i présentes dans la maille c . La densité locale dans chaque maille c est donc définie par

$$n_{ic} = \frac{1}{V_c} \sum_{k=1}^{N_{ic}} \omega_i^k. \quad (3.23)$$

Résoudre les équations (3.18), (3.19) et (3.20) sur un pas de temps Δt revient alors à déterminer les nouvelles vitesses $v_i^k(t + \Delta t)$ des particules numériques.

3.3.2 Simulation de $Q_{sd}(f_2, f_2)$ par une méthode de Bird

Nous utilisons la méthode dite de Bird sans compteur de temps et avec collisions fictives pour résoudre l'équation

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = Q_{sd}(f_2, f_2),$$

où Q_{sd} est donné par (3.3), c'est-à-dire déterminer les vitesses post-collisionnelles des particules numériques représentant les molécules (que l'on appellera pour simplifier "molécules numériques"). Cette méthode permet une conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement (si on ne tient pas compte des conditions aux limites), et bien entendu de la masse. En revanche, elle impose que toutes les molécules numériques aient la même représentativité. On notera ω_2 cette représentativité, $\Sigma_{2,2}$ la section totale de collision (*cf.* Annexe A), ici égale à $\Sigma_{2,2}^{sd} = 4\pi\varrho^2$, et N_{2c} le nombre de molécules numériques dans la cellule c .

Le principe de la méthode est le suivant :

- ▷ On sélectionne (de manière aléatoire) un nombre de paires de molécules numériques [qui seront soumises à une collision éventuelle] égal à

$$\frac{1}{2} N_{2c} (N_{2c} - 1) \frac{\omega_2}{V_c} \Delta t \Sigma_{2,2} |v_{2,2}^{rel}|_{max},$$

où $|v_{2,2}^{rel}|_{max}$ désigne la borne supérieure des vitesses relatives des molécules numériques.

- ▷ Pour chaque paire (i, j) sélectionnée, on détermine s'il y a effectivement collision avec la probabilité

$$p_{ij}^f = \frac{|v_i - v_j|}{|v_{2,2}^{rel}|_{max}}.$$

Cette technique est appelée technique de la collision fictive (ou de la particule fictive).

En pratique, on tire une variable aléatoire p suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$; si $p < p_{ij}^f$, il y a collision, sinon il n'y a pas collision.

- ▷ S'il y a collision, on modifie les vitesses des partenaires de collision d'après (3.4) et (3.5), c'est-à-dire en posant

$$\begin{aligned} v_i(t^{n+1}) &= \frac{v_i(t^n) + v_j(t^n)}{2} + \frac{|v_i(t^n) - v_j(t^n)|}{2} \sigma, \\ v_j(t^{n+1}) &= \frac{v_i(t^n) + v_j(t^n)}{2} - \frac{|v_i(t^n) - v_j(t^n)|}{2} \sigma, \end{aligned}$$

où σ est un vecteur tiré aléatoirement sur la sphère \mathbb{S}^2 . En pratique, on détermine les coordonnées sphériques $(\cos(\theta), \sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi))$ du vecteur σ en tirant deux variables aléatoires u et v suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$, et en posant

$$\cos(\theta) = 1 - 2u, \quad \sin(\theta) = 2\sqrt{u(1-u)}, \quad (3.24)$$

$$\varphi = 2\pi v. \quad (3.25)$$

Remarque 3.2 *Le nombre moyen de collisions de type 2-2 (c'est-à-dire entre molécules numériques) pendant un temps τ , dans la maille c , est alors égal à*

$$\overline{N_{coll}^{22}}(\tau) = \frac{1}{2} N_{2c} (N_{2c} - 1) \frac{\omega_2}{V_c} \Sigma_{2,2} \overline{v_{2,2}^{rel}} \tau, \quad (3.26)$$

où $\overline{v_{2,2}^{rel}}$ est la vitesse relative moyenne des molécules (dans la cellule c , sur l'intervalle de temps $[t, t + \tau]$).

Remarque 3.3 *La technique de la collision fictive serait sans intérêt si l'on devait évaluer toutes les vitesses relatives entre molécules numériques au temps t^n pour déterminer $|v_{2,2}^{rel}|_{max}$. On estime alors initialement cette valeur à $2\sqrt{2} < v_2 >$, où*

$$< v_2 > = \left(\frac{8k_B T^o}{\pi m_2} \right)^{1/2},$$

et on réajuste celle-ci à chaque pas de temps lorsqu'un couple (i, j) vérifie

$$|v_i - v_j| > |v_{2,2}^{rel}|_{max}.$$

3.3.3 Simulation de $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$ par une méthode de Nanbu

Les équations (3.18) et (3.19) sont résolues numériquement grâce à la méthode de Nanbu avec collision fictive. Remarquons que si l'on considère un couple de particules (i, j) de représentativités ω_i et ω_j et de vitesses v_i et v_j respectivement, la probabilité que la particule i collisionne avec la particule j est

$$p_{ij} = \frac{\omega_j}{V_c} \Delta t \Sigma_{i,j} |v_i - v_j|,$$

$\Sigma_{i,j}$ étant la section totale de collision entre les particules, tandis que la probabilité que la particule j collisionne avec la particule i est

$$p_{ji} = \frac{\omega_i}{V_c} \Delta t \Sigma_{i,j} |v_i - v_j|.$$

L'utilisation d'une méthode symétrique telle que la méthode Bird [Bi3] nécessite de pouvoir définir la probabilité de collision du couple, et impose donc en particulier que les représentativités des particules soient toutes égales. En supposant que toutes les particules de poussières numériques et molécules numériques aient la même représentativité ω , les nombres de particules N_{1c} et N_{2c} doivent vérifier, d'après (3.23)

$$N_{ic} = \frac{n_{ic} V_c}{\omega},$$

pour $i = 1, 2$, et par conséquent N_{1c} et N_{2c} sont liés par la relation

$$N_{2c} = \frac{n_{2c}}{n_{1c}} N_{1c}.$$

Dans le cas par exemple d'une densité locale en particules de poussière égale à $n_{1c} = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ et d'une densité locale en molécules égale à $n_{2c} = 10^{21} \text{ m}^{-3}$, on obtient

$$N_{2c} = 10^7 N_{1c}.$$

Dans cette situation, le nombre de molécules numériques seraient beaucoup trop élevé si l'on souhaite avoir une statistique correcte sur les particules de poussière (dans [Bi1], il est évoqué le nombre minimum de 20 particules par cellule). Il nous faut donc pouvoir choisir des représentativités différentes pour les deux espèces.

Nous avons alors choisi d'utiliser la méthode de Nanbu, qui est une méthode linéaire (par opposition aux méthodes symétriques telles que la méthode de Bird) et qui revient à simuler de façon successive les équations (3.18) et (3.19) (et non simultanément comme le ferait une méthode de type Bird). L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne préserve exactement que la masse et non la quantité de mouvement ; celle-ci est cependant conservée en moyenne [LP]. Notons qu'il existe d'autres approches pour aborder les collisions de particules de représentativités différentes, qui consistent par exemple à faire collisionner des fractions de particules [H]. On choisit ici de prendre la même représentativité ω_1 pour toutes les particules de poussière numériques, et la même représentativité ω_2 pour toutes les molécules numériques, mais la méthode s'adapterait au cas de particules de représentativités différentes (voir [Ba] par exemple).

Donnons ici une explication heuristique de la méthode de Nanbu, qui montre pourquoi nous appliquons celle-ci aux opérateurs R_1^d , R_2^d , R_1^{dm} et R_2^{dm} (ces opérateurs étant non classiques, rien ne prouve a priori que cette méthode puisse être appliquée à ceux-ci). Plaçons nous dans le cas spatialement homogène et considérons tout d'abord l'équation

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = R_1^{dm}(f_1, f_2),$$

où R_1^{dm} est donné par (3.11). Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = P(f_1, f_2) - \mu f_1, \quad (3.27)$$

où $P(f_1, f_2)$ est donné sous forme faible par

$$\int_{\mathbb{R}^3} P(f_1, f_2)(t, v) \varphi(v) dv = C_m \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(v_1'') f_1(t, v_1) f_2(t, v_2) h_n(w) dndwdv_2 dv_1$$

pour toute fonction test φ , et où

$$\mu(t) = 4\pi C_m \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v_2) dv_2.$$

À l'instant $n\Delta t$ (où Δt est le pas de temps choisi), le coefficient μ est approché dans la maille c par

$$\mu^n = 4\pi C_m n_{2c} = 4\pi C_m \frac{\omega_2 N_{2c}}{V_c}.$$

Soit $f_1^n(v)$ une approximation de $f(v, n\Delta t)$. Le schéma d'Euler appliqué à l'équation (3.27) donne

$$f_1^{n+1} = (1 - \mu^n \Delta t) f_1^n + \mu^n \Delta t \frac{P(f_1^n, f_2^n)}{\mu^n}.$$

Lorsque $\mu^n \Delta t \leq 1$, on peut alors interpréter ce schéma de la façon suivante [PeR2] : une particule de vitesse v_i collisionnera avec la probabilité $\mu^n \Delta t$ et sa vitesse sera modifiée suivant la loi donnée par $P(f_1^n, f_2^n)/\mu^n$, et ne collisionnera pas avec la probabilité $1 - \mu^n \Delta t$. Ainsi, à l'intérieur d'une cellule de densité en molécules n_{2c} , il suffit de sélectionner aléatoirement un nombre de paires (formées d'une particule numérique et d'une molécule numérique) égal à $N_{1c} \mu^n \Delta t$ (qui correspond au nombre moyen de collisions attendues), et de modifier la vitesse de la particule de poussière numérique suivant le terme $P(f_1^n, f_2^n)/\mu^n$. On voit donc en particulier que la méthode de sélection des paires ne dépend que du terme de perte des opérateurs (autrement dit, la partie négative), qui est bien la même que celle d'un opérateur de collision classique avec section maxwellienne. Dans le cas d'une section de collision de sphères dures, l'équation

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = R_1^d(f_1, f_2), \quad (3.28)$$

où R_1^d est donné par (3.6), peut se réécrire sous la forme (3.27) avec

$$\mu(t) = \Sigma_{1,2}^{sd} |v_{1,2}^{rel}|_{max} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v_2) dv_2$$

et

$$P(f_1, f_2)(t, v_1) = R_1^{d+}(f_1, f_2)(t, v_1) + f_1(t, v_1) \Sigma_{1,2}^{sd} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v_2) \left(|v_{1,2}^{rel}|_{max} - |v_1 - v_2| \right) dv_2,$$

$R_1^{d+}(f_1, f_2)$ étant le terme de gain de l'opérateur $R_1^d(f_1, f_2)$. Ce schéma mène alors à la méthode de Nanbu avec collision fictive (également appelée dans [PeR2] méthode de Nanbu-Babovsky), dans laquelle seul le tirage des vitesses post-collisionnelles diffère d'un opérateur classique.

3.3.3.1 Méthode de la collision fictive

L'algorithme numérique de sélection des paires de collision dans le cas de l'équation (3.28) est le suivant :

- ▷ On sélectionne aléatoirement un nombre de couples (i, j) constitué d'une particule de poussière numérique et d'une molécule numérique égal à

$$N_{2c} N_{1c} \frac{\omega_2}{V_c} \Delta t \Sigma_{1,2}^{sd} |v_{1,2}^{rel}|_{max},$$

où $|v_{1,2}^{rel}|_{max}$ correspond à la borne supérieure des vitesses relatives entre une molécule et une particule de poussière numérique, et $\Sigma_{1,2}^{sd} = \pi(r_p + \varrho)^2$ est la section totale de collision entre une molécule et un grain de poussière.

- ▷ Pour chaque paire (i, j) sélectionnée, on détermine s'il y a effectivement collision avec la probabilité

$$p_{ij}^f = \frac{|v_i - v_j|}{|v_{1,2}^{rel}|_{max}}.$$

S'il y a collision, seule la vitesse de la particule de poussière numérique est modifiée. Nous exposons dans la section suivante la façon dont est déterminée la vitesse post-collisionnelle v_1'' .

La sélection des paires de collision dans le cas de l'équation (3.19) est similaire, le nombre de paires de particules sélectionnées étant cette fois égal à

$$N_{2c} N_{1c} \frac{\omega_1}{V_c} \Delta t \Sigma_{12}^{sd} |v_{1,2}^{rel}|_{max},$$

et les vitesses modifiées en cas de collision étant celles des molécules numériques.

Remarque 3.4 *Le nombre moyen de collisions de type 1-2 pendant un temps τ dans la maille c est alors égal à*

$$\overline{N_{coll}^{12}}(\tau) = N_{2c} N_{1c} \frac{\omega_2}{V_c} \Sigma_{1,2}^{sd} \overline{v_{1,2}^{rel}} \tau, \quad (3.29)$$

où $\overline{v_{1,2}^{rel}}$ est la vitesse relative moyenne entre molécules et particules de poussière (dans la cellule c , sur l'intervalle de temps $[t, t + \tau]$), et le nombre moyen de collisions de type 2-1 pendant un temps τ dans la maille c est égal à

$$\overline{N_{coll}^{21}}(\tau) = N_{2c} N_{1c} \frac{\omega_1}{V_c} \Sigma_{1,2}^{sd} \overline{v_{1,2}^{rel}} \tau. \quad (3.30)$$

3.3.3.2 Tirage des vitesses post-collisionnelles (cas des opérateurs R_1^d et R_2^d)

Présentons maintenant la méthode de tirage des vitesses post-collisionnelles, qui est spécifique au mécanisme de collision par réflexion diffuse que nous avons considéré pour modéliser les opérateurs de collision $R_1^d(f_1, f_2)$ et $R_2^d(f_1, f_2)$. Lors d'une collision entre deux particules numériques de vitesses v_1 et v_2 , les vitesses post-collisionnelles v_1'' et v_2'' de celles-ci sont déterminées, d'après (3.9) et (3.10), à partir de la vitesse relative post-collisionnelle. Celle-ci est tirée de façon probabiliste suivant la densité de probabilité h_n donnée par (3.8), le vecteur normal au plan de réflexion diffuse n étant préalablement tiré dans la demi-sphère unité telle que $n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0$.

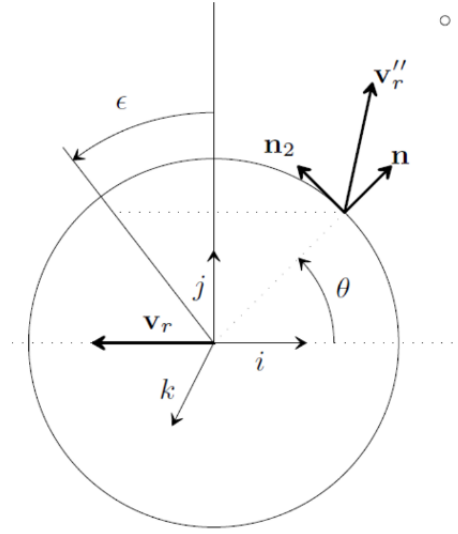


FIG. 3.1 – Méthode de tirage de la vitesse relative post-collisionnelle.

Tirage du vecteur n . On introduit un repère orthonormé $B_1 = (i, j, k)$ tel que $i = (v_1 - v_2) / |v_1 - v_2|$, et on appelle (θ, ϵ) les angles tels que n ait pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta) \cos(\epsilon), \sin(\theta) \sin(\epsilon))$ dans ce repère (cf. la figure 3.1).

- ▷ $x = \cos(\theta)$ a pour densité $\phi(x) = 2x \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$, dont la fonction de répartition est $\psi(t) = t^2$, qui s'inverse en $\psi^{-1}(u) = \sqrt{u}$. On tire donc en pratique l'angle $\theta \in [0, \pi/2]$ en prenant $\cos(\theta) = \sqrt{U_1}$, où U_1 suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.
- ▷ L'angle azimutal ϵ est indépendant de θ et suit une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. On tire donc en pratique ϵ en prenant $\epsilon = 2\pi U_2$, où U_2 suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

On construit ensuite à partir de n un nouveau repère orthonormé $B_2 = (n, n_2, n_3)$, en prenant par exemple n_2 de coordonnées $(-\sin(\theta), \cos(\theta) \cos(\epsilon), \cos(\theta) \sin(\epsilon))$ dans la base B_1 , et $n_3 = n_1 \wedge n_2$.

Tirage des coordonnées de la vitesse post-collisionnelle relative v_r'' . La vitesse $v_r'' = v_2'' - v_1''$ est tirée selon la densité de probabilité

$$\begin{aligned} h_n(s) &= \frac{2\beta^4}{\pi} (s \cdot n) \exp(-\beta^2 |s|^2) \mathbb{1}_{\{s \cdot n \geq 0\}} \\ &= \frac{2\beta^4}{\pi} x \exp(-\beta^2 x^2) \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \exp(-\beta^2 y^2) \exp(-\beta^2 z^2), \end{aligned}$$

où (x, y, z) sont les coordonnées de s dans le repère B_2 . Ainsi la densité de probabilité de la composante suivant n de v_r'' est indépendante des densités de probabilité des deux autres coordonnées, et est donnée par :

$$\varphi_1(x) = 2\beta^2 x \exp(-\beta^2 x^2) \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

Sa fonction de répartition $\psi_1(t) = 1 - \exp(-\beta^2 x^2)$ est inversible, d'inverse

$$\psi_1^{-1}(u) = \frac{1}{\beta} \sqrt{-\ln(1-u)}.$$

Ensuite, puisqu'on ne peut pas déterminer explicitement (ni donc par conséquent inverser) la primitive de $y \mapsto \exp(-\beta^2 y^2)$, on utilise la technique classique pour simuler une variable aléatoire gaussienne, qui correspond à effectuer le changement de variable $(y, z) \mapsto (R, \vartheta)$ dans la densité jointe du couple (y, z) , où $y = R \cos(\vartheta)$ et $z = R \sin(\vartheta)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \varphi_2(y) \varphi_3(z) dy dz &= \frac{\beta^2}{\pi} \exp(-\beta^2 y^2) \exp(-\beta^2 z^2) \\ &= 2\beta^2 R \exp(-R^2) dR \frac{d\vartheta}{2\pi}, \end{aligned}$$

ce qui permet d'inverser la fonction de distribution de la variable R . Finalement, on effectue le tirage de trois variables indépendantes U_3, U_4 et U_5 suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ et les coordonnées de la vitesse relative post-collisionnelle v_r'' sont données par

$$\left(\frac{1}{\beta} \sqrt{-\ln(1-U_3)}, \frac{1}{\beta} \sqrt{-\ln(1-U_4)} \cos(2\pi U_5), \frac{1}{\beta} \sqrt{-\ln(1-U_4)} \sin(2\pi U_5) \right)$$

dans le repère B_2 . On exprime finalement les coordonnées de v_r'' dans le repère d'origine B_0 par

$$v_r''|_{B_0} = M(B_0 \rightarrow B_1) M(B_1 \rightarrow B_2) v_r''|_{B_2},$$

où $M(B_0 \rightarrow B_1)$ et $M(B_1 \rightarrow B_2)$ sont respectivement les matrices de passages de B_0 à B_1 et de B_1 à B_2 .

Modification de la vitesse de l'un des deux partenaires de collision. Dans le cas de la simulation de l'opérateur $R_1^d(f_1, f_2)$, la vitesse post-collisionnelle de la particule numérique de poussière est donnée, d'après (3.9), à partir des vitesses pré-collisionnelles par

$$v_1'' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} v_2 + \frac{1}{\varepsilon+1} v_1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} v_r'',$$

tandis que dans le cas de la simulation de l'opérateur $R_2^d(f_1, f_2)$, la vitesse post-collisionnelle de la molécule numérique est donnée, d'après (3.10), par

$$v_2'' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} v_2 + \frac{1}{\varepsilon+1} v_1 + \frac{1}{\varepsilon+1} v_r''.$$

3.3.3.3 Tirage des vitesses post-collisionnelles (cas des opérateurs R_1^{dm} et R_2^{dm})

Dans le cas des opérateurs R_1^{dm} et R_2^{dm} d'expression (3.11) et (3.12), le vecteur n est tiré de façon uniforme sur la sphère (ses coordonnées polaires sont données par (3.24) et (3.25)), et la vitesse post-collisionnelle de la particule de poussière numérique est ensuite tirée comme dans la section 3.3.3.2.

3.4 Conditions sur le pas de temps et coût de simulation

3.4.1 Condition sur Δt dans le cas d'un système homogène en espace

Commençons par le couplage homogène en espace

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} = R_1(f_1, f_2), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = R_2(f_1, f_2) + Q_{sd}(f_2, f_2), \end{cases}$$

qui est résolu avec les méthodes numériques de Bird et de Nanbu sans compteur de temps aux sections 3.3.2 et 3.3.3. On vérifie immédiatement que dans le contexte spatialement homogène, les densités en nombre de particules de poussière et molécules, définies pour $i = 1, 2$ par

$$n_{f_i}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} f_i(t, v) dv,$$

sont constantes. Autrement dit, il n'y a pas d'échange de particules entre les différentes mailles. Nous notons n_1 et n_2 les densités, et N_1 et N_2 les nombres de particules de poussière numériques et molécules numériques respectivement. Remarquons que les nombres N_1 et N_2 peuvent ici être fixés (ou, de façon équivalente, on choisit les représentativités ω_1 et ω_2).

En reprenant les méthodes décrites dans les sections 3.3.2 et 3.3.3, exprimons la probabilité pour qu'une particule donnée subisse une collision pendant le temps Δt . Pour une molécule numérique i de vitesse v_i , la probabilité de collision avec une quelconque autre molécule numérique (dans la simulation de l'opérateur $Q_{sd}(f_2, f_2)$) est égale à

$$P_{22}(v_i) = \frac{n_2}{N_2} \Delta t \Sigma_{2,2}^{sd} \sum_{j=1}^{N_2} |v_i - v_j|, \quad (3.31)$$

et la probabilité de collision avec une particule de poussière numérique est égale à

$$P_{21}(v_i) = \frac{n_1}{N_1} \Delta t \Sigma_{1,2}^{sd} \sum_{l=1}^{N_1} |v_i - v_l|. \quad (3.32)$$

La probabilité pour qu'une particule de poussière numérique k de vitesse v_k collisionne avec une quelconque molécule numérique est ensuite égale à

$$P_{12}(v_k) = \frac{n_2}{N_2} \Delta t \Sigma_{1,2}^{sd} \sum_{j=1}^{N_2} |v_k - v_j|. \quad (3.33)$$

Le fait que les valeurs de P_{22} , P_{21} et P_{12} doivent être inférieures à 1 impose alors des conditions sur le pas de temps Δt . Estimons que

$$P_{22}(v_i) \approx n_2 \Delta t \Sigma_{2,2}^{sd} < v_{2,2}^{rel} >,$$

$$P_{21}(v_i) \approx n_1 \Delta t \Sigma_{1,2}^{sd} < v_{1,2}^{rel} >,$$

et

$$P_{12}(v_k) \approx n_2 \Delta t \Sigma_{1,2}^{sd} < v_{1,2}^{rel} >,$$

où $< v_{2,2}^{rel} >$ et $< v_{1,2}^{rel} >$ sont les vitesses relatives moyennes entre les molécules, ou entre les molécules et particules de poussières respectivement. On peut ainsi exprimer la condition

$$\max(P_{22}(v_i), P_{21}(v_i), P_{12}(v_k)) \leq 1$$

en fonction des fréquences moyennes de collision introduites aux Chapitres 1, données ici par

$$\nu_{22} = n_2 \Sigma_{2,2}^{sd} < v_{2,2}^{rel} >, \quad (3.34)$$

$$\nu_{21} = n_1 \Sigma_{1,2}^{sd} < v_{1,2}^{rel} >, \quad (3.35)$$

et

$$\nu_{12} = n_2 \Sigma_{1,2}^{sd} < v_{1,2}^{rel} >. \quad (3.36)$$

On obtient alors la condition suivante sur le pas de temps

$$\Delta t \leq \min\left(\frac{1}{\nu_{12}}, \frac{1}{\nu_{22}}, \frac{1}{\nu_{21}}\right). \quad (3.37)$$

Or, d'après l'expression des sections de sphères dures $\Sigma_{1,2}^{sd}$ et $\Sigma_{2,2}^{sd}$, et en estimant comme au Chapitre 1 que

$$< v_{2,2}^{rel} > = \sqrt{2} < v_2 >$$

et

$$< v_{1,2}^{rel} > \approx < v_2 >,$$

les fréquences de collision ν_{12} , ν_{22} et ν_{21} sont liées d'après (3.34), (3.35), et (3.36) par les relations

$$\nu_{22} \approx 4\sqrt{2} \left(\frac{\rho}{r_p}\right)^2 \nu_{12}, \quad (3.38)$$

et

$$\nu_{21} = \frac{n_1}{n_2} \nu_{12}. \quad (3.39)$$

Compte tenu des hypothèses (3.14) et (3.13), on en déduit que

$$\nu_{12} \gg \nu_{22} \quad \text{et} \quad \nu_{12} \gg \nu_{21} \quad (3.40)$$

et la condition (3.37) devient donc

$$\Delta t \leq 1/\nu_{12}. \quad (3.41)$$

Considérons l'exemple suivant : on choisit comme paramètres physiques

$$\begin{cases} r_p &= 10^{-6} \text{ m}, \\ \varrho &= 2,085 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \\ n_1 &= 10^{14} \text{ m}^{-3}, \\ n_2 &= 10^{21} \text{ m}^{-3}. \end{cases} \quad (3.42)$$

On obtient alors

$$\begin{cases} 1/\nu_{12} &\approx 6 \cdot 10^{-13} \text{ s}, \\ 1/\nu_{21} &\approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ s}, \\ 1/\nu_{22} &\approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}. \end{cases}$$

Dans ce cas, la condition (3.41) impose donc de prendre

$$\Delta t \leq 6 \cdot 10^{-13} \text{ s}.$$

Remarque 3.5 Cette condition sur le pas de temps Δt est imposée par la méthode dite sans compteur de temps (“No Time Counter”) que nous avons utilisée. Dans la méthode originelle de Bird [Bi2], appelée “Time counter”, aucune condition n’est en revanche imposée sur le pas de temps. Le principe de celle-ci est de n’effectuer qu’une seule collision à la fois, et de générer au fur et à mesure une suite de temps en suivant une loi de Poisson jusqu’à arriver au pas de temps désiré. Cependant, bien que le pas de temps puisse être choisi plus grand, cette méthode n’est pas plus rapide : en effet, le coût de la simulation est lié au nombre total de collisions effectuées (qui est en moyenne le même dans les deux méthodes) et non au pas de temps choisi. De plus, cette méthode n’est pas applicable pour un code parallèle. Dans l’optique d’obtenir ensuite une version parallèle de notre code (cf. Chapitre 6), nous avons donc utilisé la méthode sans compteur de temps.

3.4.2 Condition sur Δt dans le cas d’un système inhomogène en espace

Dans le cas d’un système inhomogène en espace, les équations de transport (3.21) et (3.22) imposent aussi une condition sur le pas de temps. On peut interpréter celle-ci en disant qu’il est nécessaire que le pas de temps soit inférieur au temps moyen de “séjour” d’une particule dans une maille ; autrement dit, si on note Δx la dimension typique d’une maille (son côté dans le cas d’une maille cubique), on doit avoir

$$\bar{v}_2 \Delta t \leq \Delta x, \quad (3.43)$$

et

$$\bar{v}_1 \Delta t \leq \Delta x, \quad (3.44)$$

où \bar{v}_2 et \bar{v}_1 sont les vitesses moyennes des molécules et des particules de poussière à l’intérieur de la maille. On peut interpréter cette condition comme une condition de type CFL.

Remarque 3.6 En approchant \bar{v}_1 et \bar{v}_2 par les vitesses thermiques moyennes $\langle v_1 \rangle$ et $\langle v_2 \rangle$ (cf. Annexe A), qui sont liées par $\langle v_1 \rangle = \sqrt{\varepsilon} \langle v_2 \rangle$, on voit que la plus contraignante des conditions (3.43) et (3.44) est la condition (3.43). Par exemple, dans les conditions physiques données par (3.42), et pour une maille de 10^{-2} m de côté, la condition (3.43) correspond à

$$\Delta t \leq 2 \cdot 10^{-5} \text{ s},$$

tandis que la condition (3.44) correspond à

$$\Delta t \leq 3 \cdot 10^1 \text{ s.}$$

Par ailleurs, remarquons que dans le cas d'un système inhomogène en espace, on ne peut plus se fixer les nombres N_{1c} et N_{2c} dans une maille c : ceux-ci sont imposés par l'évolution du système et le transport des particules et molécules numériques d'une maille à l'autre. On peut cependant fixer les représentativités ω_1 et ω_2 (dans l'étape d'initialisation).

3.4.3 Nombre de paires de collision

Le temps de simulation du système (3.1)–(3.2) dépend principalement du nombre de collisions effectuées lors de la simulation des opérateurs de collisions $Q_{sd}(f_2, f_2)$, $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$. En approchant les nombres moyens de paires de collision $\overline{N_{coll}^{12}}(\tau)$, $\overline{N_{coll}^{22}}(\tau)$ et $\overline{N_{coll}^{21}}(\tau)$ pendant le temps τ comme ci-dessus (c'est-à-dire en remplaçant $v_{2,2}^{rel}$ par $\langle v_{2,2}^{rel} \rangle$ et $v_{1,2}^{rel}$ par $\langle v_{1,2}^{rel} \rangle$), on a

$$\frac{\overline{N_{coll}^{12}}(\tau)}{\overline{N_{coll}^{21}}(\tau)} \sim \frac{N_{1c}}{N_{2c}} \frac{n_2^\circ}{n_1^\circ},$$

et

$$\frac{\overline{N_{coll}^{12}}(\tau)}{\overline{N_{coll}^{22}}(\tau)} \sim \frac{N_{1c}}{N_{2c}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{r_p}{\varrho} \right)^2.$$

Ainsi si les nombres N_{2c} et N_{1c} sont tels que $N_{1c} \sim N_{2c}$, alors les conditions (3.13) et (3.14) impliquent

$$\overline{N_{coll}^{12}}(\tau) \gg \overline{N_{coll}^{21}}(\tau),$$

et

$$\overline{N_{coll}^{12}}(\tau) \gg \overline{N_{coll}^{22}}(\tau).$$

C'est donc le nombre moyen de collisions de type 1-2 (particules-molécules) qui est le plus important.

Dans le cas d'un système homogène en espace, le temps caractéristique auquel on s'intéresse (pour étudier la convergence des grandeurs caractéristiques telles que la vitesse macroscopique et la température cinétique) correspond au plus grand des temps moyen entre collision, c'est-à-dire

$$\max \left(\frac{1}{\nu_{12}}, \frac{1}{\nu_{22}}, \frac{1}{\nu_{21}} \right).$$

Pour l'exemple des conditions physiques données par (3.42), ce temps est égal à $\nu_{21} \approx 6 \cdot 10^{-6}$ s. Les nombres moyens de collisions durant le temps $\tau = 10^{-5}$ s est alors (en prenant $N_1 = N_2 = 10^3$)

$$\overline{N_{coll}^{12}}(\tau) \sim 3 \cdot 10^{10},$$

$$\overline{N_{coll}^{21}}(\tau) \sim 3 \cdot 10^3,$$

et

$$\overline{N_{coll}^{22}}(\tau) \sim 4 \cdot 10^3.$$

Dans le cas d'un système inhomogène en espace, le temps typique auquel on s'intéresse est par contre fixé par le contexte de la simulation. Considérons l'exemple d'une simulation d'une durée $\tau = 10^{-3}$ s, avec des conditions physiques données par (3.42). En estimant que $N_{1c} \sim N_{2c} \sim 10^3$, les nombres moyens de collision sont de l'ordre de :

$$\overline{N_{coll}^{12}}(\tau) \sim 3 \cdot 10^{12},$$

$$\overline{N_{coll}^{21}}(\tau) \sim 3 \cdot 10^5,$$

et

$$\overline{N_{coll}^{22}}(\tau) \sim 4 \cdot 10^5.$$

Ces exemples confirment donc que le nombre moyen de collisions 1 – 2 est prédominant sur les autres collisions. De plus, ce nombre est excessif pour espérer obtenir un temps de simulation raisonnable (au moins dans le contexte inhomogène en espace). Par exemple, le temps CPU d'une simulation numérique d'une durée réelle de 10^{-3} s sur monoprocesseur dans les conditions précédentes, dans une unique cellule de volume 10^{-6} m³, avec un pas de temps $\Delta t = 5 \cdot 10^{-13}$ s est alors de l'ordre de $4,5 \cdot 10^6$ s (soit 1250 h, c'est-à-dire 52 jours).

La simulation de l'opérateur de collision $R_1(f_1, f_2)$ peut donc se révéler extrêmement coûteuse en temps de calcul lorsque le rayon des particules de poussières est trop important (typiquement, dans le cas d'une densité en molécules de l'ordre de $n_2^0 = 10^{21}$ m, lorsque le rayon des poussières est supérieur à 10^{-7} m).

3.5 Exemples de simulations numériques du couplage homogène en espace

Présentons maintenant quelques résultats de simulations numériques dans un contexte homogène en espace (afin de s'affranchir des conditions aux limites). Dans toutes les simulations présentées dans ce Chapitre, nous considérerons un gaz formé de molécules d'azote (de rayon $\varrho = 2,085 \cdot 10^{-10}$ m) et des particules de poussière de tungstène (de masse volumique $\rho = 19300$ kg·m⁻³) dans une unique cellule de volume $V = 10^{-6}$ m³. Les paramètres physiques r_p et α° choisis permettent ici d'obtenir des temps de calcul raisonnables, mais ne correspondent pas tout à fait aux valeurs caractéristiques du contexte d'ITER. Nous examinons l'évolution de plusieurs quantités : la vitesse macroscopique des espèces d'une part, définie pour $i = 1, 2$ par

$$\mathbf{u}_{f_i}(t) = \frac{1}{n_{f_i}} \int_{\mathbb{R}^3} f_i(t, v) v dv,$$

et la température cinétique des espèces d'autre part, définie pour $i = 1, 2$ par

$$T_{f_i}(t) = \frac{1}{n_{f_i}} \frac{m_i}{3k_B} \left[\int_{\mathbb{R}^3} f_i(t, v) (v - \mathbf{u}_{f_i}(t))^2 dv \right].$$

3.5.1 Cas des opérateurs à section de sphères dures

On s'intéresse dans cette section au système

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} = R_1^d(f_1, f_2), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = R_2^d(f_1, f_2) + Q_{sd}(f_2, f_2), \end{cases}$$

dans lequel l'opérateur Q_{sd} est donné par (3.3), et les opérateurs $R_1^d(f_1, f_2)$ et $R_2^d(f_1, f_2)$ sont donnés par (3.6) et (3.7).

3.5.1.1 Évolution temporelle des vitesses macroscopiques

La figure 3.2 représente l'évolution des vitesses moyennes des molécules et des particules de poussière de rayon $r_p = 2 \cdot 10^{-9}$ m. Les distributions en molécules et particules de poussières sont initialisées à partir de distributions maxwelliennes :

$$f_{1,in}(v) = M_{n_1, \mathbf{u}_{1,in}, T_{1,in}},$$

où $\mathbf{u}_{1,in} = (0, 0, 0)$ m·s⁻¹, $T_{1,in} = 100$ K, $n_1 = 5 \cdot 10^{15}$ m⁻³,

$$f_{2,in}(v) = M_{n_2, \mathbf{u}_{2,in}, T_{2,in}},$$

$\mathbf{u}_{2,in} = (300, 300, 300)$ m·s⁻¹, $T_{2,in} = 400$ K, $n_2 = 10^{20}$ m⁻³. Le pas de temps est pris égal à $\Delta t = 10^{-6}$, et le nombre de particules et de molécules numériques respectivement égal à $N_1 = 10^4$ et $N_2 = 10^4$.

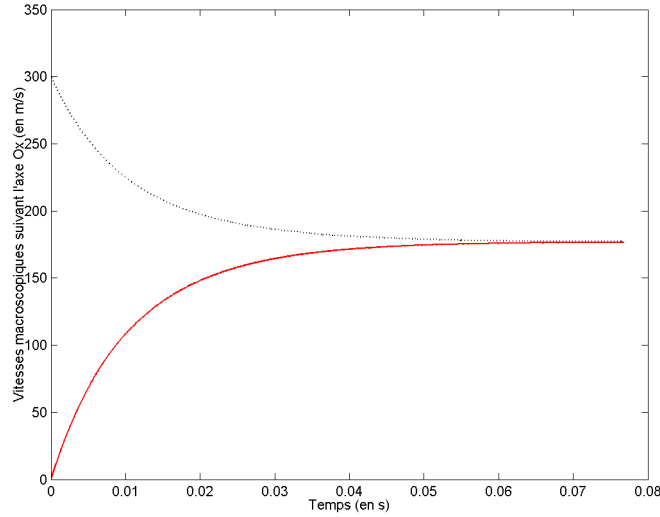


FIG. 3.2 – Évolution des vitesses macroscopiques suivant Ox des deux espèces.

On constate que les vitesses macroscopiques des espèces convergent vers une unique vitesse correspondant à

$$\mathbf{u}_\infty = \frac{(n_1 \mathbf{u}_{f_{1,in}} + \varepsilon n_2 \mathbf{u}_{f_{2,in}})}{n_1 + \varepsilon n_2} \approx 177 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

comme dans le cas des mélanges gazeux. Cela nous permet en particulier de vérifier que la quantité de mouvement est bien conservée en moyenne.

3.5.1.2 Évolution temporelle des températures cinétiques des espèces

Les figures 3.3 et 3.4 présentent l'évolution des températures cinétiques des molécules et des particules de poussières pour différentes valeurs de la température de surface T_{surf} et de la vitesse macroscopique initiale des molécules. Les autres conditions sont les mêmes que dans le paragraphe précédent.

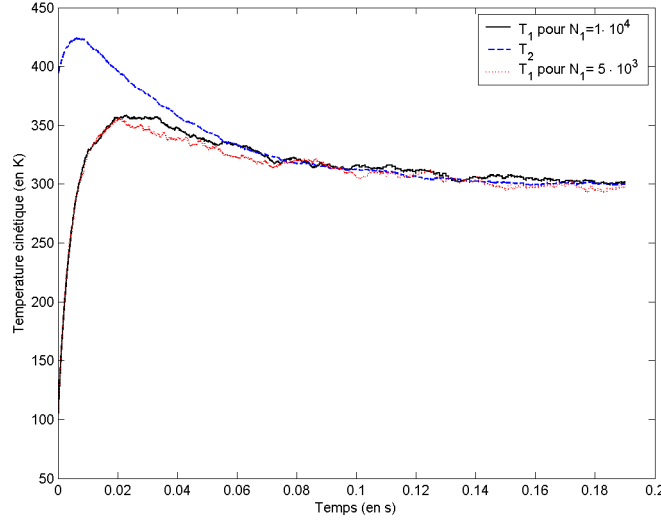


FIG. 3.3 – Évolution des températures cinétiques des deux espèces pour $T_{surf} = 300$ K, $\mathbf{u}_{2,in} = (300, 300, 300)$ m·s⁻¹.

On constate à travers ces exemples que les températures cinétiques des espèces convergent vers une température commune correspondant à la température de surface des poussières. Cela correspond à ce que l'on pouvait attendre à partir de considérations physiques.

Remarque 3.7 Dans le cas des mélanges pour lesquels l'énergie cinétique est conservée (c'est le cas par exemple du système (3.1)–(3.2) homogène en espace et avec les opérateurs de collision R_1^e et R_2^e introduits au Chapitre 1), les températures cinétiques convergent vers une température limite donnée par

$$T_{limite} = \frac{n_1 T_{1,in} + n_2 T_{2,in}}{n_1 + n_2}.$$

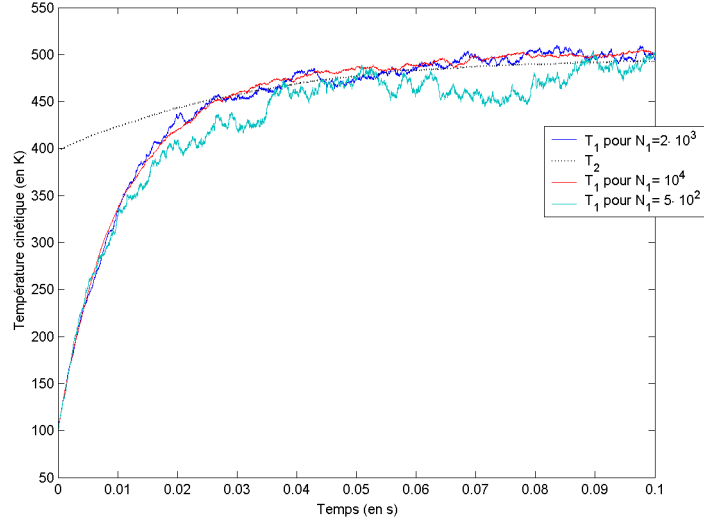


FIG. 3.4 – Évolution des températures cinétiques des espèces pour $T_{surf} = 500$ K, $\mathbf{u}_{2,in} = (0, 0, 0)$ m·s⁻¹.

3.5.2 Validation du code

3.5.2.1 Modèle à section pseudo-maxwellienne

On considère le système homogène en espace

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = R_1^{dm}(f_1, f_2) \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = Q_{sd}(f_2, f_2) + R_2^{dm}(f_1, f_2), \quad (3.46)$$

de conditions initiales

$$\begin{aligned} f_1(0, v) &= f_{1,in}(v), \\ f_2(0, v) &= f_{2,in}(v), \end{aligned}$$

où $v \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}^+$, R_1^{dm} et R_2^{dm} sont les opérateurs de collisions de réflexion diffuse à section maxwellienne introduits au Chapitre 1, donnés sous forme faible par (3.11) et (3.12). L'opérateur Q_{sd} est donné par (3.3), mais l'expression de sa section de collision n'a pas d'importance pour l'étude que nous allons mener puisqu'on a (formellement)

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(t, v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} Q(t, v) v dv = \int_{\mathbb{R}^3} Q(t, v) |v|^2 dv = 0, \quad (3.47)$$

pour tout opérateur Q d'expression de type (1.28).

3.5.2.2 Évolution des vitesses macroscopiques

Évolution théorique.

Les calculs qui suivent sont effectués de façon formelle. On voit immédiatement d'après (3.45) et (3.46) que les densités n_{f_1} et n_{f_2} définies par

$$n_{f_i}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} f_i(t, v) dv$$

vérifient

$$\frac{dn_{f_i}}{dt} = 0, \quad (3.48)$$

pour $i = 1, 2$ et sont donc constantes. On note n_1 et n_2 ces valeurs.

Proposition 3.1 *L'évolution des vitesses macroscopiques des distributions f_1 et f_2 vérifiant le système (3.45)–(3.46) est donnée, de façon formelle, par*

$$\mathbf{u}_{f_1}(t) = (\mathbf{u}_{f_1, in} - \mathbf{u}_\varepsilon^\infty) \exp(-t/\tau_\varepsilon) + \mathbf{u}_\varepsilon^\infty, \quad (3.49)$$

et

$$\mathbf{u}_{f_2}(t) = (\mathbf{u}_{f_2, in} - \mathbf{u}_\varepsilon^\infty) \exp(-t/\tau_\varepsilon) + \mathbf{u}_\varepsilon^\infty, \quad (3.50)$$

où on a posé

$$\tau_\varepsilon = \frac{1 + \varepsilon}{4\pi C_m(n_1 + \varepsilon n_2)}, \quad \mathbf{u}_\varepsilon^\infty = \frac{(n_1 \mathbf{u}_{f_1, in} + \varepsilon n_2 \mathbf{u}_{f_2, in})}{n_1 + \varepsilon n_2}.$$

Preuve de la Proposition 3.1. Les expressions des vitesses post-collisionnelles (3.9) et (3.10) permettent de vérifier la relation de conservation de la quantité de mouvement suivante :

$$v_1'' + \varepsilon v_2'' = v_1 + \varepsilon v_2.$$

On en déduit, d'après (3.11) et (3.12) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(R_1^{dm}(f_1, f_2)(t, v) + \varepsilon R_2^{dm}(f_1, f_2)(t, v) \right) v dv = 0,$$

puis

$$\frac{d}{dt} (n_1 \mathbf{u}_{f_1} + \varepsilon n_2 \mathbf{u}_{f_2}) = 0. \quad (3.51)$$

Ainsi pour tout $t \geq 0$,

$$n_1 \mathbf{u}_{f_1}(t) + \varepsilon n_2 \mathbf{u}_{f_2}(t) = (n_1 + \varepsilon n_2) \mathbf{u}_\varepsilon^\infty. \quad (3.52)$$

De plus, d'après (3.9) et (3.11), on a

$$\begin{aligned} n_1 \frac{d\mathbf{u}_{f_1}}{dt} &= C_m \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}^3} (v_1'' - v_1) f_1(\cdot, v_1) f_2(\cdot, v_2) h_n(w) dw dn dv_2 dv_1 \\ &= \frac{\varepsilon C_m}{1 + \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}^3} (v_2 - v_1 - w) f_1(\cdot, v_1) f_2(\cdot, v_2) h_n(w) dw dn dv_2 dv_1 \\ &= 4\pi n_1 n_2 C_m \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} (\mathbf{u}_{f_2} - \mathbf{u}_{f_1}), \end{aligned} \quad (3.53)$$

d'après (1.41) et grâce au fait que $\int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}^3} w h_n(w) dw dn = 0$, d'où l'on déduit

$$\frac{d\mathbf{u}_{f_1}}{dt} = \frac{4\pi}{1+\varepsilon} C_m (n_1 + \varepsilon n_2) (\mathbf{u}_\varepsilon^\infty - \mathbf{u}_{f_1}). \quad (3.54)$$

On obtient finalement (3.49) et (3.50) à partir de (3.52) et (3.54). \diamond

Remarquons en particulier que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{u}_{f_1}(t) - \mathbf{u}_{f_2}(t) = \left(\mathbf{u}_{f_1, in} - \mathbf{u}_{f_2, in} \right) \exp(-t/\tau_\varepsilon). \quad (3.55)$$

De plus, nous aurons besoin dans la suite de l'égalité suivante, déduite de (3.51), (3.52), et (3.54) :

$$\frac{d\mathbf{u}_{f_2}}{dt} = \frac{4\pi C_m}{1+\varepsilon} n_1 (\mathbf{u}_{f_1} - \mathbf{u}_{f_2}). \quad (3.56)$$

Comparaison avec les résultats numériques.

La figure 3.6 montre la comparaison entre les expressions explicites des vitesses macroscopiques données par (3.49) et (3.50) et celles obtenues par simulation DSMC des distributions en molécules et particules de poussières. Dans cet exemple, nous avons pris $r_p = 10^{-9}$ m, et des densités initiales égales à

$$f_{1, in}(v) = M_{n_1^\circ, \mathbf{u}_{1, in}, T_{1, in}},$$

où $\mathbf{u}_{1, in} = (0, 0, 0)$ m·s⁻¹, $T_{1, in} = 100$ K, $n_1^\circ = 5 \cdot 10^{15}$ m⁻³, et à

$$f_{2, in}(v) = M_{n_2^\circ, \mathbf{u}_{2, in}, T_{2, in}},$$

où $\mathbf{u}_{2, in} = (300, 300, 300)$ m·s⁻¹, $T_{2, in} = 400$ K, $n_2^\circ = 5 \cdot 10^{19}$ m⁻³. La constante C_m est choisie égale à

$$C_m = \frac{1}{4} (r_p + \varrho)^2 \sqrt{\frac{8k_B T_{2, in}}{\pi m_2}} = 1,37 \cdot 10^{-16} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Les paramètres numériques sont $\Delta t = 4 \cdot 10^{-6}$ s, $N_1 = 2 \cdot 10^4$ et $N_2 = 2 \cdot 10^5$.

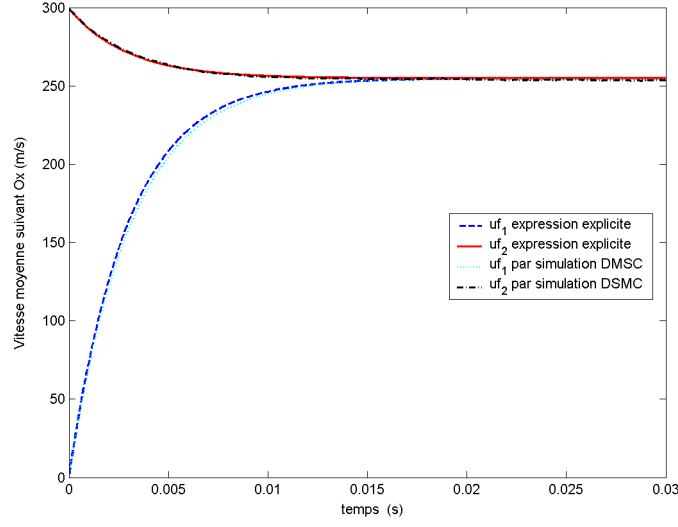


FIG. 3.5 – Évolution de la première composante de la vitesse macroscopique : comparaison entre les résultats numériques et les expressions explicites dans le cas d’une section maxwellienne.

3.5.2.3 Évolution des températures cinétiques

Évolution théorique.

Compte tenu de (3.48), les températures cinétiques des espèces sont données par

$$T_{f_1}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{m_2}{3k_B} \left(\frac{1}{n_1} \int_{\mathbb{R}^3} v^2 f_1(t, v) dv - \mathbf{u}_{f_1}^2(t) \right),$$

et

$$T_{f_2}(t) = \frac{m_2}{3k_B} \left(\frac{1}{n_2} \int_{\mathbb{R}^3} v^2 f_2(t, v) dv - \mathbf{u}_{f_2}^2(t) \right).$$

Proposition 3.2 *Les températures cinétiques des distributions f_1 et f_2 vérifiant le système (3.45)–(3.46) sont solutions des équations différentielles suivantes*

$$\frac{d}{dt} T_{f_1}(t) = \frac{4\pi}{(1+\varepsilon)^2} C_m n_2 \left(\varepsilon T_{f_2}(t) - (\varepsilon^2 + 2\varepsilon) T_{f_1}(t) + \frac{m_2}{3k_B} \varepsilon (\mathbf{u}_{f_2}(t) - \mathbf{u}_{f_1}(t))^2 + \frac{2m_2 \varepsilon}{3k_B \beta^2} \right), \quad (3.57)$$

et

$$\frac{d}{dt} T_{f_2}(t) = \frac{4\pi}{(1+\varepsilon)^2} C_m n_1 \left[\varepsilon T_{f_1}(t) - (1 + 2\varepsilon) T_{f_2}(t) + \frac{m_2}{3k_B} (\mathbf{u}_{f_1}(t) - \mathbf{u}_{f_2}(t))^2 + \frac{2m_2}{3k_B \beta^2} \right], \quad (3.58)$$

où \mathbf{u}_{f_1} et \mathbf{u}_{f_2} sont données par (3.49) et (3.50). De plus, si $\mathbf{u}_{f_1, in} = \mathbf{u}_{f_2, in}$, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_{f_1}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} T_{f_2}(t) = \frac{1}{(1+\varepsilon)} \frac{4}{3} T_{surf}.$$

Preuve de la Proposition 3.2. D'après (3.45) et la formulation faible (3.11) de R_1^{dm} , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, v) v^2 dv &= \int_{\mathbb{R}^3} v^2 R_1^{dm}(f_1, f_2)(t, v) dv \\ &= C_m \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left(|v_1''|^2 - |v_1|^2 \right) f_1(t, v_1) f_2(t, v_2) h_n(w) dn dw dv_2 dv_1. \end{aligned}$$

Or, d'après (3.9), la différence entre les carrés des vitesses pré- et post-collisionnelles est donnée par

$$|v_1''|^2 - |v_1|^2 = \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \left\{ \varepsilon^2 v_2^2 - (\varepsilon^2 + 2\varepsilon) v_1^2 + 2\varepsilon v_1 \cdot v_2 + \varepsilon^2 w^2 - 2\varepsilon w \cdot (v_1 + \varepsilon v_2) \right\}.$$

Comme on a (cf. Annexe C)

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} w^2 h_n(w) dw dn = \frac{8\pi}{\beta^2}, \quad (3.59)$$

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} w h_n(w) dw dn = 0, \quad (3.60)$$

et

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} h_n(w) dw dn = 4\pi, \quad (3.61)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, v) v^2 dv &= \frac{4\pi C_m}{(1 + \varepsilon)^2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \left\{ \varepsilon^2 v_2^2 - (\varepsilon^2 + 2\varepsilon) v_1^2 \right\} f_1(t, v_1) f_2(t, v_2) dv_2 dv_1 \\ &\quad + \frac{8\pi \varepsilon C_m}{(1 + \varepsilon)^2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} v_1 \cdot v_2 f_1(t, v_1) f_2(t, v_2) dv_2 dv_1 \\ &\quad + C_m \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon)^2} \frac{8\pi}{\beta^2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f_1(t, v_1) f_2(t, v_2) dv_2 dv_1 \\ &= \frac{4\pi \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon)^2} C_m n_1 n_2 \left(\frac{3k_B}{m_2} T_{f_2}(t) + \mathbf{u}_{f_2}^2(t) \right) \\ &\quad - \frac{4\pi(\varepsilon^2 + 2\varepsilon)}{(1 + \varepsilon)^2} C_m n_2 n_1 \left(\varepsilon \frac{3k_B}{m_2} T_{f_1}(t) + \mathbf{u}_{f_1}^2(t) \right) \\ &\quad + \frac{8\pi \varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2} C_m n_2 n_1 \mathbf{u}_{f_2}(t) \cdot \mathbf{u}_{f_1}(t) + \frac{C_m \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon)^2} \frac{8\pi}{\beta^2} n_2 n_1. \end{aligned}$$

De plus, d'après (3.53), on a

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{3k_B}{m_2} \frac{d}{dt} T_{f_1}(t) &= \frac{1}{n_1} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(v, t) v^2 dv - 2\mathbf{u}_{f_1}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}_{f_1}(t) \\ &= \frac{1}{n_1} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(v, t) v^2 dv - 8\pi C_m \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} n_2 \left(\mathbf{u}_{f_1}(t) \cdot \mathbf{u}_{f_2}(t) - \mathbf{u}_{f_1}(t)^2 \right), \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{3k_B}{m_2} \frac{d}{dt} T_{f_1}(t) &= \frac{4\pi\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} C_m \frac{3k_B}{m_2} n_2 T_{f_2}(t) - \frac{4\pi(\varepsilon^2 + 2\varepsilon)\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} C_m \frac{3k_B}{m_2} n_2 T_{f_1}(t) \\ &\quad + 4\pi n_2 C_m \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^2 (\mathbf{u}_{f_2}(t) - \mathbf{u}_{f_1}(t))^2 + \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} C_m \frac{8\pi}{\beta^2} n_2. \end{aligned}$$

On obtient finalement (3.57). Ensuite, d'après (3.46), (3.12) et grâce à (3.47), on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) v^2 dv &= \int_{\mathbb{R}^3} v^2 R_2(f_1, f_2)(t, v) dv \\ &= C_m \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} (|v_2''|^2 - |v_2|^2) f_1(t, v_1) f_2(t, v_2) h_n(w) dndwdv_2 dv_1, \end{aligned}$$

avec, d'après (3.10),

$$|v_2''|^2 - |v_2|^2 = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \left\{ v_1^2 - (1+2\varepsilon)v_2^2 + 2\varepsilon v_1 \cdot v_2 + w^2 + 2w \cdot (v_1 + \varepsilon v_2) \right\}.$$

Ainsi, d'après (3.59) et (3.60), on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) v^2 dv &= \frac{4\pi C_m}{(1+\varepsilon)^2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \left\{ v_1^2 - (1+2\varepsilon)v_2^2 \right\} f_1(t, v_1) f_2(t, v_2) dv_2 dv_1 \\ &\quad + \frac{8\pi\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} C_m n_2 n_1 \mathbf{u}_{f_2}(t) \cdot \mathbf{u}_{f_1}(t) + \frac{C_m}{(1+\varepsilon)^2} \frac{8\pi}{\beta^2} n_2 n_1 \\ &= \frac{4\pi}{(1+\varepsilon)^2} C_m n_2 n_1 \left(\varepsilon \frac{3k_B}{m_2} T_{f_1}(t) + \mathbf{u}_{f_1}^2(t) \right) \\ &\quad - \frac{4\pi}{(1+\varepsilon)^2} C_m n_2 n_1 (1+2\varepsilon) \left(\frac{3k_B}{m_2} T_{f_2}(t) + \mathbf{u}_{f_2}^2(t) \right) \\ &\quad + \frac{8\pi\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} C_m n_2 n_1 \mathbf{u}_{f_2}(t) \cdot \mathbf{u}_{f_1}(t) + \frac{C_m}{(1+\varepsilon)^2} \frac{8\pi}{\beta^2} n_2 n_1, \end{aligned}$$

puis, grâce à (3.56),

$$\begin{aligned} \frac{3k_B}{m_2} \frac{d}{dt} T_{f_2}(t) &= \frac{1}{n_2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) v^2 dv - 2\mathbf{u}_{f_2}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}_{f_2}(t) \\ &= \frac{1}{n_2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) v^2 dv + \frac{8\pi}{1+\varepsilon} C_m n_1 \left(\mathbf{u}_{f_2}(t)^2 - \mathbf{u}_{f_2}(t) \cdot \mathbf{u}_{f_1}(t) \right). \end{aligned}$$

On obtient ensuite

$$\begin{aligned} \frac{3k_B}{m_2} \frac{d}{dt} T_{f_2}(t) &= \frac{3k_B}{m_2} \frac{4\pi}{(1+\varepsilon)^2} C_m n_1 (\varepsilon T_{f_1}(t) - (1+2\varepsilon) T_{f_2}(t)) \\ &\quad + \frac{4\pi}{(1+\varepsilon)^2} C_m n_1 (\mathbf{u}_{f_1}(t) - \mathbf{u}_{f_2}(t))^2 + \frac{C_m}{(1+\varepsilon)^2} \frac{8\pi}{\beta^2} n_1, \end{aligned}$$

et finalement (3.58). De plus, si $\mathbf{u}_{f_{1,in}} = \mathbf{u}_{f_{2,in}}$, alors d'après (3.55), $[T_{f_1}; T_{f_2}]$ est solution du système différentiel

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_{f_2} \\ T_{f_1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} T_{f_2} \\ T_{f_1} \end{bmatrix} + c,$$

où

$$A = \frac{4\pi}{(1+\varepsilon)^2} C_m \begin{bmatrix} -n_1(1+2\varepsilon) & n_1\varepsilon \\ n_2\varepsilon & -n_2(\varepsilon^2+2\varepsilon) \end{bmatrix},$$

et

$$c = \frac{8\pi}{(1+\varepsilon)^2} C_m \frac{m_2}{3k_B\beta^2} \begin{bmatrix} n_1 \\ \varepsilon n_2 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres λ et μ de A sont distinctes et réelles, strictement négatives. En effet

$$\det(A - XI) = 0 \Leftrightarrow X^2 + (n_1(1+2\varepsilon) + n_2(\varepsilon^2+2\varepsilon))X + n_1(1+2\varepsilon)n_2(\varepsilon^2+2\varepsilon) - n_2n_1\varepsilon^2 = 0, \quad (3.62)$$

et le discriminant de l'équation (3.62) est égal à

$$\Delta = (n_1(1+2\varepsilon) - n_2(\varepsilon^2+2\varepsilon))^2 + 4n_2n_1\varepsilon^2 > 0,$$

ce qui prouve que les valeurs propres sont réelles et distinctes. De plus $\lambda < 0$ et $\mu < 0$ car :

$$\lambda + \mu = -(n_1(1+2\varepsilon) + n_2(\varepsilon^2+2\varepsilon)) < 0,$$

et

$$\lambda\mu = 2n_2n_1\varepsilon(1+\varepsilon)^2 > 0.$$

La matrice A est donc diagonalisable. Soit $D = \text{diag}(\lambda, \mu)$ et P la matrice de passage telle que

$$A = PDP^{-1}.$$

La solution de (E) s'écrit

$$\begin{bmatrix} T_{f_2}(t) \\ T_{f_1}(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} P^{-1} \left(\begin{bmatrix} T_{f_2}(0) \\ T_{f_1}(0) \end{bmatrix} + A^{-1}c \right) - A^{-1}c,$$

et ainsi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} T_{f_2}(t) \\ T_{f_1}(t) \end{bmatrix} = -A^{-1}c.$$

Par ailleurs, comme $\beta^2 = \frac{m_2}{2k_B T_{surf}}$, on a

$$\begin{aligned} -A^{-1}c &= \frac{1}{(1+\varepsilon)} \frac{2m_2}{3k_B\beta^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+\varepsilon)} \frac{4}{3} T_{surf} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \diamond \end{aligned}$$

Comparaison avec les résultats numériques.

Les équations (3.57) et (3.58) décrivant l'évolution théorique des températures cinétiques sont résolues par une méthode de Runge-Kutta. La figure 3.6 montre la comparaison entre ces solutions et les températures obtenues par simulation DSMC des distributions

en molécules et particules de poussières. Dans cet exemple, nous avons pris $r_p = 10^{-9}$ m, $T_{surf} = 200$ K, et des densités initiales égales à

$$f_{1,in}(v) = M_{n_1, \mathbf{u}_{1,in}, T_{1,in}},$$

où $\mathbf{u}_{1,in} = (0, 0, 0)$ m·s⁻¹, $T_{1,in} = 100$ K, $n_1 = 5 \cdot 10^{15}$ m⁻³,

$$f_{2,in}(v) = M_{n_2, \mathbf{u}_{2,in}, T_{2,in}},$$

$\mathbf{u}_{2,in} = (0, 0, 0)$ m·s⁻¹, $T_{2,in} = 400$ K, $n_2 = 5 \cdot 10^{19}$ m⁻³. La constante C_m est choisie telle que

$$C_m = \frac{(r_p + \varrho)^2}{4} \sqrt{\frac{8k_B T_{2,in}}{\pi m_2}} = 1,37 \cdot 10^{-16} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Les paramètres numériques sont $\Delta t = 4 \cdot 10^{-6}$ s, $N_1 = 2 \cdot 10^4$ et $N_2 = 2 \cdot 10^5$.

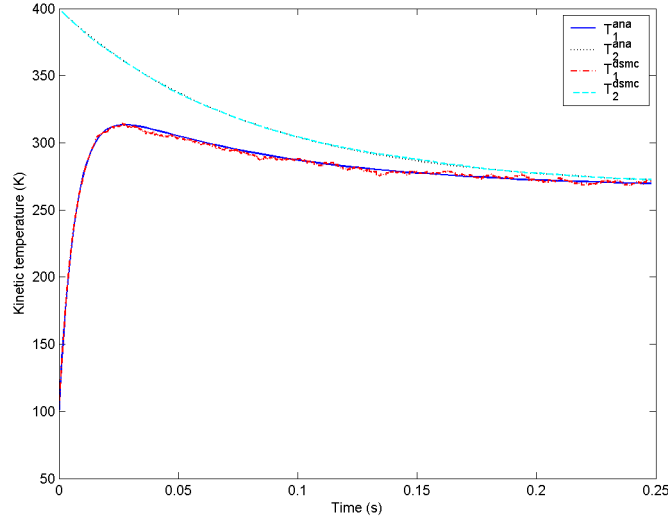


FIG. 3.6 – Évolution des températures cinétiques des espèces : comparaison entre les résultats numériques et les expressions “semi-explicites” dans le cas d’une section maxwellienne.

3.6 Conclusion

Les expressions explicites des vitesses moyennes et des températures cinétiques dans le cas des opérateurs R_1^{dm} et R_2^{dm} d’expression (3.11) et (3.12) sont cohérentes, dans le cas homogène en espace, avec les résultats numériques obtenus, ce qui est un élément important de la validation de la méthode numérique utilisée.

Cependant, nous avons pu constater que la simulation de l’opérateur $R_1(f_1, f_2)$ était beaucoup trop coûteuse lorsque le rayon des particules était trop élevé. En effet, le temps moyen de collision entre les particules de poussières et les molécules (lié à la section de sphères dures entre ces deux espèces, et donc au rayon des particules de poussière) impose

de prendre un pas de temps très faible. Le modèle établi au Chapitre 1 apparaît donc peu utilisable en pratique pour des poussières de rayon supérieur à 10^{-7} m. Nous allons alors dans la seconde partie de ce travail dériver à partir de ce modèle un modèle asymptotique pour les particules de grande taille, à travers le rapport de masse ε .

Par ailleurs, nous présenterons un exemple de simulation du système (3.1)–(3.2) (spatialement inhomogène) dans le contexte d'un accident de perte de vide au Chapitre 6.

Deuxième partie

Étude d'un modèle de type
Vlasov/Boltzmann

Chapitre 4

Dérivation d'un modèle asymptotique Vlasov/Boltzmann

Sommaire

4.1	Introduction	150
4.2	Premier modèle asymptotique	153
4.2.1	Échelles caractéristiques du système	153
4.2.2	Adimensionnement	155
4.2.3	Développement asymptotique de $\bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2)$	161
4.2.4	Premier modèle asymptotique Vlasov/Boltzmann	164
4.2.5	Étude du système à différentes échelles de temps	165
4.3	Second modèle asymptotique	168
4.3.1	Second adimensionnement	168
4.3.2	Développement asymptotique de $R_1(f_1, f_2)$	169
4.3.3	Second modèle asymptotique Vlasov/Boltzmann	172

4.1 Introduction

Dans ce Chapitre, nous partons du système

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_x f_1 + \frac{F_1}{m_1(r)} \cdot \nabla_{v_1} f_1 = R_1(f_1, f_2), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + v_2 \cdot \nabla_x f_2 + \frac{F_2}{m_2} \cdot \nabla_{v_2} f_2 = R_2(f_1, f_2) + Q(f_2, f_2), \\ x \in \mathbb{R}^3, v_1 \in \mathbb{R}^3, v_2 \in \mathbb{R}^3, r \in [r_{min}, r_{max}], t \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (4.1)$$

décrivant l'évolution d'un système gaz-poussière, et nous nous proposons d'introduire des modèles asymptotiques approchant celui-ci dans la limite où le rapport de masse entre les particules de poussière et les molécules tend vers 0. Rappelons que $f_1 := f_1(t, x, v, r)$ et $f_2 := f_2(t, x, v)$ sont respectivement les densités en particules de poussière et molécules. L'opérateur $Q(f_2, f_2)$ modélise les collisions entre molécules et est donné par

$$Q(f_2, f_2)(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_2(t, x, v') f_2(t, x, v'_*) - f_2(t, x, v) f_2(t, x, v_*)] \times b \left(\frac{|\sigma \cdot (v - v_*)|}{|v - v_*|} \right) |v - v_*|^\alpha d\sigma dv_*, \quad (4.2)$$

où (v', v'_*) est donné par

$$\begin{cases} v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \\ v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma. \end{cases}$$

L'opérateur $R_1(f_1, f_2)$ modélise les collisions entre les particules de poussière et molécules et $R_2(f_1, f_2)$ modélise les collisions entre molécules et particules de poussière. Dans le cas du modèle dit de collisions élastiques, ceux-ci sont donnés par :

$$R_1^e(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_1(t, x, v'_1, r) f_2(t, x, v'_2) - f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2)] \times q(|v_2 - v_1|, |\omega \cdot (v_2 - v_1)|, r) d\omega dv_2, \quad (4.3)$$

et

$$R_2^e(f_1, f_2)(t, x, v_2) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [f_1(t, x, v'_1, r) f_2(t, x, v'_2) - f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2)] \times q(|v_2 - v_1|, |\omega \cdot (v_2 - v_1)|, r) dr d\omega dv_1, \quad (4.4)$$

où q est la section de collision de sphères dures, donnée par

$$q(|\xi|, |\omega \cdot \xi|, r) = \frac{1}{2} (r + \varrho)^2 |\omega \cdot \xi|, \quad (4.5)$$

v'_1 et v'_2 sont les vitesses post-collisionnelles, données par

$$\begin{cases} v'_1 = v_1 + \frac{2\varepsilon(r)}{1 + \varepsilon(r)} [\omega \cdot (v_2 - v_1)] \omega, \\ v'_2 = v_2 - \frac{2}{1 + \varepsilon(r)} [\omega \cdot (v_2 - v_1)] \omega, \end{cases} \quad (4.6)$$

et $\varepsilon(r)$ est le rapport de masse entre une molécule et une particule de poussière de rayon r . Dans le cas du modèle dit de réflexion diffuse, les opérateurs sont donnés par :

$$\begin{aligned} R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) = & \frac{2\beta^4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (v_1 - v_2)] (n \cdot w) \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot w > 0\}} \\ & \times (r + \varrho)^2 \left[f_1(t, x, v_1'', r) f_2(t, x, v_2'') \exp\left(-\beta^2(v_1 - v_2)^2\right) \right. \\ & \left. - f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \exp\left(-\beta^2(v_1'' - v_2'')^2\right) \right] dndwdv_2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

et

$$\begin{aligned} R_2^d(f_1, f_2)(t, x, v_2) = & \frac{2\beta^4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [n \cdot (v_1 - v_2)] (n \cdot w) \mathbb{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot w > 0\}} \\ & \times (r + \varrho)^2 \left[f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \exp\left(-\beta^2(v_1'' - v_2'')^2\right) \right. \\ & \left. - f_1(t, x, v_1'', r) f_2(t, x, v_2'') \exp\left(-\beta^2(v_1 - v_2)^2\right) \right] dndwdv_1 dr, \end{aligned} \quad (4.8)$$

avec

$$v_1'' = \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} (v_1 + \varepsilon(r)v_2 - \varepsilon(r)w), \quad (4.9)$$

$$v_2'' = \frac{1}{1 + \varepsilon(r)} (v_1 + \varepsilon(r)v_2 + w), \quad (4.10)$$

dans le cas où la section efficace pré-collisionnelle est issu d'un modèle de sphères dures. Nous introduisons également les opérateurs R_1^{dm} et R_2^{dm} , dits à section pseudo-maxwellienne, donnés sous forme faible par

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} R_1^{dm}(f_1, f_2)(t, x, v, r) \varphi(v) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} C_m(r) [\varphi(v_1'') - \varphi(v_1)] f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) h_n(w) dndwdv_2 dv_1, \end{aligned} \quad (4.11)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} R_2^{dm}(f_1, f_2)(t, x, v, r) \varphi(v) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} C_m(r) [\varphi(v_2'') - \varphi(v_2)] f_1(t, v_1, x, r) f_2(t, v_2, x) h_n(w) dr dndwdv_2 dv_1, \end{aligned} \quad (4.12)$$

où C_m une fonction positive de la variable r , v_1'' et v_2'' sont données par (4.9) et (4.10), φ est une fonction test, et h_n est définie par

$$h_n(w) = \frac{2\beta^4}{\pi} (n \cdot w) \exp(-\beta^2|w|^2) \mathbb{1}_{\{n \cdot w \geq 0\}}. \quad (4.13)$$

Notons que par rapport au système (1.27), nous avons introduit dans le système (4.1) des forces F_1 et F_2 s'exerçant sur les particules de poussière et les molécules de gaz respectivement, afin d'en discuter l'influence à différentes échelles de temps et d'espace. On s'intéressera en particulier au cas où les champs de forces $F_1/m_1(r)$ et F_2/m_2 correspondent au champ de gravité \mathcal{G} .

Afin de mettre en évidence la différence entre les vitesses de relaxation vers l'équilibre iso-therme et iso-vitesse de la poussière et du gaz, phénomène déjà décrit par Grad [Gr2] puis par Degond-Lucquin [DL1, DL2, DL3, CD] pour un mélange de particules de masses très différentes, il est intéressant de travailler sur des quantités adimensionnées. À la différence de l'étude menée dans ces articles, les densités des deux espèces sont ici également très différentes. Nous supposons comme dans les Chapitres précédents que le rapport de masse $\varepsilon_m = \varepsilon(r_{min})$ entre une molécule et une particule de poussière de rayon r_{min} est très petit :

$$\varepsilon_m \ll 1, \quad (4.14)$$

et que le rapport caractérisant les ordres de grandeur relatifs entre les densités en particules de poussière et en molécules n_1° et n_2° est aussi très petit :

$$\alpha^\circ = n_1^\circ/n_2^\circ \ll 1. \quad (4.15)$$

De plus, le faible rapport de masse entre les molécules et les particules de poussière est lié à la grande différence de taille entre celles-ci, que l'on a traduit par la relation

$$\frac{\varrho}{r_{min}} = \left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{1/3} \ll 1, \quad (4.16)$$

où

$$\eta = \frac{3m_2}{4\pi\rho\varrho^3} \quad (4.17)$$

est une constante sans dimension dépendant de la masse volumique ρ des particules. Par conséquent, les sections totales de collision $\Sigma_{1,2}^{sd}(r)$ et $\Sigma_{2,2}^{sd}$, définies par (1.17) et (1.16), ne pourront pas être considérées comme dans [DL1, DL2, CD, DL3] du même ordre de grandeur.

Par ailleurs, nous effectuons dorénavant deux hypothèses supplémentaires.

- ▷ Nous supposons dans ce Chapitre que les particules de poussière ont des rayons du même ordre de grandeur, c'est-à-dire que

$$r_{min} \sim r_{max}. \quad (4.18)$$

Cette hypothèse nous permet d'introduire un unique ordre de grandeur de vitesse relatif aux particules de poussière, et une unique fréquence de collision entre molécules et particules de poussière. Nous choisirons r_{min} comme rayon de référence pour la définition de ces grandeurs.

- ▷ On supposera que les paramètres α° , ε_m et η vérifient

$$\frac{\alpha^\circ}{4\pi} \left(\frac{\eta}{\varepsilon_m} \right)^{2/3} \sim 1. \quad (4.19)$$

En effet, cette estimation est généralement vérifiée dans le contexte d'ITER et correspond par exemple au cas de molécules d'azote et de particules de poussière de tungstène (on a alors $\eta \approx 6 \cdot 10^{-2}$), de rayon minimum $r_{min} = 5 \cdot 10^{-7}$ m (on a alors $\varepsilon_m \approx 4 \cdot 10^{-12}$), et pour un rapport de densité $\alpha^\circ = 10^{-6}$.

Nous développons ici deux approches, conduisant à deux modèles asymptotiques différents. Dans la section 2, nous introduisons, dans le même esprit que [DL1, DL2, CD, DL3], un ordre de grandeur des vitesses, propre à chacune des espèces. Nous effectuons ensuite une analyse dimensionnelle des différentes variables et fonctions de densité intervenant dans le système. Celle-ci nous conduit à un premier adimensionnement du système (4.1), dans lequel les densités f_1 et f_2 sont adimensionnées de façon différente. À partir de ce système adimensionné, nous proposons un modèle asymptotique dans la limite $\varepsilon_m \rightarrow 0$. L'idée est d'utiliser le caractère rasant des collisions entre les particules de poussière et molécules (du point de vue des particules), et d'effectuer un développement asymptotique formel de l'opérateur de collision $R_1(f_1, f_2)$ adimensionné. Ce système asymptotique nous permet ensuite d'effectuer au paragraphe 4.2.5 une analyse du comportement du système à différentes échelles de temps.

Nous introduisons ensuite dans la section 4.3 un second développement asymptotique de l'opérateur $R_1(f_1, f_2)$. Celui-ci est obtenu après avoir cette fois adimensionné les vitesses des molécules et des particules à partir du même ordre de grandeur.

4.2 Premier modèle asymptotique

Nous établissons dans cette section un premier adimensionnement des variables et fonctions de densité afin d'aboutir à un système faisant apparaître les échelles de temps et d'espace décrivant l'évolution des densités. Dans cette optique, nous commençons par analyser les différentes vitesses, longueurs et temps caractéristiques du système.

4.2.1 Échelles caractéristiques du système

Vitesses caractéristiques.

Nous introduisons ici les échelles de vitesse. Pour cela nous définissons les vitesses caractéristiques des molécules et des particules de poussière à partir des vitesses thermiques moyennes d'un gaz à l'équilibre (*cf.* Annexe A). Grâce à l'hypothèse (4.18) relative aux rayons des particules de poussière, nous n'introduisons qu'une seule vitesse caractéristique pour celles-ci, définie à partir des particules de plus petit rayon. On appelle

$$V_1^\circ := \langle v_1 \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T^\circ}{\pi m_1(r_{min})}}, \quad (4.20)$$

et

$$V_2^\circ := \langle v_2 \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T^\circ}{\pi m_2}}, \quad (4.21)$$

les vitesses caractéristiques des deux espèces. Celles-ci sont liées par la relation suivante :

$$V_1^\circ = \sqrt{\varepsilon_m} V_2^\circ. \quad (4.22)$$

Nous utiliserons V_1° et V_2° comme échelles caractéristiques des vitesses des particules de poussière et molécules pour l'obtention d'une forme adimensionnée du système (4.1). De plus, la vitesse relative entre les molécules et les particules de poussière peut être caractérisée par la vitesse relative moyenne $\langle v_{1,2}^{rel} \rangle$ qui, compte tenu de l'hypothèse (4.14), est telle que

$$\langle v_{1,2}^{rel} \rangle \approx \langle v_2 \rangle. \quad (4.23)$$

On utilisera donc V_2° comme ordre de grandeur de la vitesse relative entre les espèces.

Temps caractéristiques.

Nous allons, en reprenant l'analyse menée sur les fréquences de collision dans la section 1.1 du Chapitre 1, définir les différents temps caractéristiques intervenant dans le système. Compte tenu de l'hypothèse (4.18), les fréquences de collision ν_{11} , ν_{12} , ν_{22} et ν_{21} sont liées comme au Chapitre 3 par les relations (*cf.* (3.38) et (3.39))

$$\nu_{11} \sim \alpha^\circ \nu_{22},$$

$$\nu_{22} \sim 4\sqrt{2} \left(\frac{\varrho}{r_{min}} \right)^2 \nu_{12},$$

et

$$\nu_{21} = \alpha^\circ \nu_{12}.$$

De plus, l'hypothèse (4.19) nous permet d'établir dorénavant une comparaison entre les fréquences ν_{22} et ν_{21} : on a

$$\nu_{22} \sim \nu_{21}.$$

Sous l'hypothèse (4.19), on peut donc mettre en évidence trois échelles de temps relatives au système : celle relative aux collisions entre particules de poussière et molécules, caractérisée par $1/\nu_{12}$, celle relative aux collisions des molécules avec les autres particules (molécules ou particules de poussière), et celle relative aux collisions entre particules de poussière, caractérisée par $1/\nu_{11}$ (que l'on ne prend pas en compte dans le contexte d'un accident de perte de vide dans le réacteur ITER). Nous posons donc

$$t_{12} := \frac{1}{n_2^\circ V_2^\circ \pi (r_{min})^2},$$

et

$$t_{22} := \frac{1}{n_2^\circ V_2^\circ 4\pi \varrho^2},$$

les échelles de temps relatives au système (4.1), qui sont liées d'après (4.19) par la relation

$$t_{12} \sim \alpha^\circ t_{22}.$$

Cependant, l'adimensionnement de la variable de temps du système ne peut être effectué qu'à partir d'un seul temps caractéristique de référence t° . On s'intéressera donc successivement aux deux cas $t^\circ = t_{12}$ et $t^\circ = t_{22}$.

Échelle d'espace.

Dans le cas non homogène en espace, il nous faut introduire une échelle d'espace L° identique pour les deux espèces. Cependant, nous considérons deux échelles possibles. Celle-ci sont définies en fonction de l'échelle de temps t° choisie, et correspondent aux distances moyennes parcourues par chacune des espèces durant le temps t° . On définit alors

$$L_1 := t^\circ V_1^\circ, \quad (4.24)$$

et

$$L_2 := t^\circ V_2^\circ, \quad (4.25)$$

qui, d'après (4.22), sont liées par la relation

$$L_1 = \sqrt{\varepsilon_m} L_2. \quad (4.26)$$

Dans le cas où $t^\circ = t_{12}$, L_1 correspond au libre parcours moyen des particules de poussière (pour les collisions avec les molécules) ; et lorsque $t^\circ = t_{22}$, L_2 correspond au libre parcours moyen des molécules.

4.2.2 Adimensionnement

Variables d'espace, de vitesse et de temps.

Nous commençons par adimensionner les variables d'espace, de temps, de vitesse et de rayon dans le cas de la densité f_1 , en suivant l'approche de [DL2]. Pour cela, nous définissons les variables adimensionnées \bar{x} , \bar{t} et \bar{r} par

$$\bar{x} = \frac{x}{L^\circ}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^\circ}, \quad \text{et} \quad \bar{r} = \frac{r}{r_{min}},$$

où t° est l'échelle de temps choisie et L° celle d'espace. Ces échelles seront fixées par la suite parmi $\{t_{22}, t_{12}\}$ pour t° et parmi $\{L_1, L_2\}$ pour L° . Nous adimensionnons ensuite les vitesses relatives aux particules de poussière et aux molécules de façon différente à partir des échelles de vitesse V_1° et V_2° en définissant :

$$\hat{v}_1 = \frac{v_1}{V_1^\circ}, \quad (4.27)$$

pour les vitesses des particules de poussière, et

$$\check{v}_2 = \frac{v_2}{V_2^\circ}, \quad (4.28)$$

pour les vitesses des molécules. Remarquons que la relation de conservation de la quantité de mouvement (1.29) devient, d'après (4.22),

$$\bar{r}^3 \hat{v}'_1 + \sqrt{\varepsilon_m} \check{v}'_2 = \bar{r}^3 \hat{v}_1 + \sqrt{\varepsilon_m} \check{v}_2, \quad (4.29)$$

et dans le cas de collisions élastiques la relation de conservation de l'énergie (1.30) devient

$$\bar{r}^3 \hat{v}'_1 + \check{v}_2^2 = \bar{r}^3 \hat{v}_1^2 + \check{v}_2^2. \quad (4.30)$$

Champ de force extérieure.

Pour les forces dérivant d'un potentiel, comme dans le cas de la force de gravité, l'échelle de force F° qui s'introduit naturellement est définie par

$$F^\circ L^\circ = k_B T^\circ,$$

$k_B T^\circ$ correspondant à l'énergie cinétique commune aux deux espèces. De plus, dans le cas où F_1 et F_2 correspondent aux poids P_1 et P_2 exercés sur une particule de poussière de rayon r et une molécule respectivement, on peut écrire, compte tenu de (4.20) et (4.21), F° sous la forme

$$F^\circ = \frac{\pi}{8} \frac{(V_1^\circ)^2 m_1(r_{min})}{L^\circ},$$

ou encore

$$F^\circ = \frac{\pi}{8} \frac{(V_2^\circ)^2 m_2}{L^\circ}.$$

On définit alors les forces de gravité adimensionnées \bar{P}_1 et \bar{P}_2 par :

$$\bar{P}_1 = \frac{\pi}{8} \frac{P_1}{F^\circ} = \frac{P_1 L^\circ}{(V_1^\circ)^2 m_1(r_{min})},$$

et

$$\bar{P}_2 = \frac{\pi}{8} \frac{P_2}{F^\circ} = \frac{P_2 L^\circ}{(V_2^\circ)^2 m_2}.$$

Fonctions de densité

Pour obtenir des fonctions de densités spatiales adimensionnées $\hat{f}_1 := \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r})$ et $\check{f}_2 := \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2)$, il nous faut déterminer les échelles d'adimensionnement f_1° et f_2° dépendant des échelles t° , L° et r_{min} telles que

$$\hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) = \frac{f_1(t, x, v, r)}{f_1^\circ},$$

et

$$\check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) = \frac{f_2(t, x, v_2)}{f_2^\circ}.$$

Par définition de f_1 , le nombre de particules de poussière dans l'élément de volume dx centré en x dont la vitesse appartient à la classe $[v_1, v_1 + dv_1]$ et dont le rayon appartient à l'intervalle $[r, r + dr]$ à l'instant t est égal à

$$\begin{aligned} f_1(t, x, v_1, r) dx dv_1 dr &= f_1(t^\circ \bar{t}, L^\circ \bar{x}, V_1^\circ \hat{v}_1, r_{min} \bar{r}) (L^\circ)^3 (V_1^\circ)^3 r_{min} d\bar{x} d\hat{v}_1 d\bar{r} \\ &= f_1^\circ \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) (L^\circ)^3 (V_1^\circ)^3 r_{min} d\bar{x} d\hat{v}_1 d\bar{r}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Le nombre de particules de poussière dans l'élément de volume dx étant de l'ordre de $n_1^\circ dx = n_1^\circ (L^\circ)^3 d\bar{x}$, on est donc amené à poser

$$f_1^\circ = \frac{n_1^\circ}{(V_1^\circ)^3 r_{min}}. \quad (4.32)$$

De même, le nombre de molécules dans l'élément de volume dx centré en x dont la vitesse appartient à la classe $[v_2, v_2 + dv_2]$ à l'instant t est égal à

$$\begin{aligned} f_2(t, x, v_2) dx dv_2 &= f_2(t^\circ \bar{t}, L^\circ \bar{x}, V_2^\circ \check{v}_2) (L^\circ)^3 (V_2^\circ)^3 d\bar{x} d\check{v}_2 \\ &= f_2^\circ \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) (L^\circ)^3 (V_2^\circ)^3 d\bar{x} d\check{v}_2, \end{aligned} \quad (4.33)$$

et est de l'ordre de $n_2^\circ dx = n_2^\circ (L^\circ)^3 d\bar{x}$. On pose donc

$$f_2^\circ = \frac{n_2^\circ}{(V_2^\circ)^3}. \quad (4.34)$$

Opérateurs adimensionnés

Opérateur Q : Pour des raisons d'homogénéité, on adimensionnera la section de collision b de l'opérateur Q en posant

$$\bar{b}(\cos(\chi)) = \frac{b(\cos(\chi)) (V_2^\circ)^\alpha}{4\pi \varrho^2 V_2^\circ}.$$

On obtient alors

$$Q(f_2, f_2)(t, x, v) = 4\pi \varrho^2 (f_2^\circ)^2 (V_2^\circ)^4 \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2), \quad (4.35)$$

d'après (4.2), où

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}) &= \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_*) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_*) - \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_*) \right] \\ &\quad \times \bar{b}(\cos(\chi)) |\check{v} - \check{v}_*|^\alpha d\sigma d\check{v}_*, \end{aligned} \quad (4.36)$$

avec

$$\begin{cases} \check{v}' &= \frac{\check{v} + \check{v}_*}{2} + \frac{|\check{v} - \check{v}_*|}{2} \sigma, \\ \check{v}'_* &= \frac{\check{v} + \check{v}_*}{2} - \frac{|\check{v} - \check{v}_*|}{2} \sigma. \end{cases}$$

Opérateurs R_1^e et R_2^e : Comme

$$\frac{1}{2}(r + \varrho)^2 |\omega \cdot (v_2 - v_1)| = (r_{min})^2 V_2^\circ \frac{1}{2} \left(\bar{r} + \left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{1/3} \right)^2 |\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)|,$$

on adimensionne la section de collision q en posant

$$\bar{q}(|\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1|, |\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)|, \bar{r}) = \frac{1}{2} \left(\bar{r} + \left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{1/3} \right)^2 |\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)|.$$

Alors

$$R_1^e(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) = f_1^\circ f_2^\circ (r_{min})^2 (V_2^\circ)^4 \bar{R}_1^e(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}), \quad (4.37)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{R}_1^e(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\hat{v}_1, \bar{r}) = & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left[\hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}'_1, \bar{r}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}'_2) - \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \right] \\ & \times \bar{q}(|\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1|, |\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)|, \bar{r}) d\omega d\check{v}_2. \end{aligned} \quad (4.38)$$

De même, on obtient

$$R_2^e(f_1, f_2)(t, x, v_2) = f_1^\circ f_2^\circ (r_{min})^3 V_2^\circ (V_1^\circ)^3 \bar{R}_2^e(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2), \quad (4.39)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{R}_2^e(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\check{v}_2) = & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} \left[\hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}'_1, \bar{r}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}'_2) - \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \right] \\ & \times \bar{q}(|\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1|, \omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1), \bar{r}) d\bar{r} d\omega d\hat{v}_1, \end{aligned} \quad (4.40)$$

en notant $r_0 = r_{max}/r_{min}$. Dans (4.38) et (4.40), $(\hat{v}'_1, \check{v}'_2)$ est défini par

$$\begin{cases} \hat{v}'_1 &= \hat{v}_1 + \frac{2\sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-3}}{1 + \varepsilon_m \bar{r}^{-3}} [\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)] \omega, \\ \check{v}'_2 &= \check{v}_2 - \frac{2}{1 + \varepsilon_m \bar{r}^{-3}} [\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)] \omega. \end{cases} \quad (4.41)$$

On remarque notamment que

$$\hat{v}'_1 - \hat{v}_1 = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_m}).$$

On va donc pouvoir effectuer un développement asymptotique (formel) sur la quantité $\varphi(\hat{v}'_1) - \varphi(\hat{v}_1)$ à l'ordre 1 en $\sqrt{\varepsilon_m}$, où φ est la fonction test dans la formulation faible (1.1) de R_1^e .

Opérateurs R_1^d et R_2^d : On considère maintenant les opérateurs de type “réflexion diffuse”, d'expressions $R_1^d(f_1, f_2)$ et $R_2^d(f_1, f_2)$ données par (4.7) et (4.8). Tout d'abord, puisque

$$\beta = \sqrt{\frac{m_2}{2kT}} = \sqrt{\frac{\pi m_2}{8kT^\circ}} \sqrt{\frac{4T^\circ}{\pi T_{surf}}},$$

on adimensionne la constante β par

$$\beta = \frac{\bar{\beta}}{V_2^\circ}, \quad (4.42)$$

où $\bar{\beta} = \sqrt{\frac{4T^\circ}{\pi T_{surf}}}$ est une constante sans dimension. De plus, la vitesse w apparaissant dans l'expression de $R_1^d(f_1, f_2)$ correspond à la vitesse relative entre une molécule et une particule de poussière $v_2'' - v_1''$, où (v_1'', v_2'') est défini par (4.9)–(4.10). On adimensionne donc w à partir de l'échelle de vitesse V_2° en posant $w = V_2^\circ \check{w}$. On pose ensuite

$$R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) = f_1^\circ f_2^\circ (r_{min})^2 (V_2^\circ)^4 \bar{R}_1^d(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}), \quad (4.43)$$

où

$$\begin{aligned}
& \bar{R}_1^d(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \\
&= \frac{2\bar{\beta}^4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2)] (n \cdot \check{w}) \mathbb{1}_{\{n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2) \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot \check{w} \geq 0\}} \\
&\quad \times \left(\bar{r} + \left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{1/3} \right)^2 \left[\hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1'', \bar{r}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2'') \exp \left(-\bar{\beta}^2 (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \exp \left(-\bar{\beta}^2 \check{w}^2 \right) \right] dnd\check{w}d\check{v}_2,
\end{aligned} \tag{4.44}$$

avec

$$\hat{v}_1'' = \frac{1}{1 + \varepsilon_m \bar{r}^{-3}} \left(\hat{v}_1 + \sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-3} \check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-3} \check{w} \right), \tag{4.45}$$

$$\check{v}_2'' = \frac{1}{1 + \varepsilon_m \bar{r}^{-3}} \left(\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 + \varepsilon_m \bar{r}^{-3} \check{v}_2 + \check{w} \right), \tag{4.46}$$

et

$$R_2^d(f_1, f_2)(t, x, v_2) = f_1^\circ f_2^\circ (r_{min})^3 (V_2^\circ) (V_1^\circ)^3 \bar{R}_2^d(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2), \tag{4.47}$$

avec

$$\begin{aligned}
& \bar{R}_2^d(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \\
&= \frac{2\bar{\beta}^4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} [n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2)] (n \cdot \check{w}) \mathbb{1}_{\{n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2) \geq 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot \check{w} \geq 0\}} \\
&\quad \times \left(\bar{r} + \left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{1/3} \right)^2 \left[\hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1'', \bar{r}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2'') \exp \left(-\bar{\beta}^2 (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \exp \left(-\bar{\beta}^2 \check{w}^2 \right) \right] d\bar{r}dnd\check{w}d\hat{v}_1,
\end{aligned} \tag{4.48}$$

où \hat{v}_1'' et \check{v}_2'' sont donnés par (4.45) et (4.46). Remarquons que comme dans le cas élastique, on a ici $\hat{v}_1'' - \hat{v}_1 = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_m})$. Dans le cas d'une section pseudo-maxwellienne, la constante $C_m(r)$ apparaissant dans (4.11) et (4.12) est adimensionnée, par cohérence avec l'expression de l'opérateur $\bar{R}_1^d(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r})$, en posant

$$C_m(r) = \bar{C}_m(r) V_2^\circ (r_{min})^2.$$

On pose alors

$$R_1^{dm}(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) = f_1^\circ f_2^\circ (r_{min})^2 (V_2^\circ)^4 \bar{R}_1^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}), \tag{4.49}$$

et

$$R_2^{dm}(f_1, f_2)(t, x, v_2) = f_1^\circ f_2^\circ (r_{min})^3 (V_2^\circ) (V_1^\circ)^3 \bar{R}_2^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2), \tag{4.50}$$

où les opérateurs adimensionnés $\bar{R}_1^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r})$ et $\bar{R}_2^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2)$ sont donnés sous forme faible par

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} \bar{R}_1^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \varphi(\hat{v}_1) dv \\
&= \frac{2\bar{\beta}^4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \bar{C}_m(r) [\varphi(\hat{v}_1'') - \varphi(\hat{v}_1)] \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \\
&\quad \times \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) (n \cdot \check{w}) \exp(-\bar{\beta}^2 |\check{w}|^2) \mathbb{1}_{\{n \cdot \check{w} \geq 0\}} dnd\check{w}d\check{v}_2d\hat{v}_1,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} \bar{R}_2^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \varphi(\check{v}_2) dv \\
&= \frac{2\bar{\beta}^4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} \bar{C}_m(r) [\varphi(\check{v}_2'') - \varphi(\check{v}_2)] \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \\
&\quad \times \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) (n \cdot \check{w}) \exp(-\bar{\beta}^2 |\check{w}|^2) \mathbb{1}_{\{n \cdot \check{w} \geq 0\}} d\bar{r}dnd\check{w}d\check{v}_2d\hat{v}_1,
\end{aligned} \tag{4.52}$$

où φ est une fonction test, et où \hat{v}_1'' et \check{v}_2'' sont donnés par (4.45) et (4.46).

Équations adimensionnées.

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les équations vérifiées par les densités adimensionnées \hat{f}_1 et \check{f}_2 en fonction des échelles de temps et d'espace t° et L° . On a

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_x \hat{f}_1 + \frac{P_1}{m_1(r_{min})} \cdot \nabla_{v_1} \hat{f}_1 = \frac{f_1^\circ}{t^\circ} \left(\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial t} + \frac{V_1^\circ t^\circ}{L^\circ} \hat{v}_1 \cdot \nabla_{\bar{x}} \hat{f}_1 + \frac{V_1^\circ t^\circ}{L^\circ} \bar{P}_1 \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 \right), \tag{4.53}$$

et

$$\frac{\partial \check{f}_2}{\partial t} + v_2 \cdot \nabla_x \check{f}_2 + \frac{P_2}{m_2} \cdot \nabla_{v_2} \check{f}_2 = \frac{f_2^\circ}{t^\circ} \left(\frac{\partial \check{f}_2}{\partial t} + \frac{V_2^\circ t^\circ}{L^\circ} \check{v}_2 \cdot \nabla_{\bar{x}} \check{f}_2 + \frac{V_2^\circ t^\circ}{L^\circ} \bar{P}_2 \cdot \nabla_{\check{v}_2} \check{f}_2 \right). \tag{4.54}$$

Ainsi, d'après (4.32), (4.34), (4.35), (4.37), (4.39), (4.43) et (4.47), on obtient les équations suivantes :

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial t} + \frac{V_1^\circ t^\circ}{L^\circ} \hat{v}_1 \cdot \nabla_{\bar{x}} \hat{f}_1 + \frac{V_1^\circ t^\circ}{L^\circ} \bar{P}_1 \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 = t^\circ n_2^\circ (r_{min})^2 V_2^\circ \bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}), \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \check{f}_2}{\partial t} + \frac{V_2^\circ t^\circ}{L^\circ} \check{v}_2 \cdot \nabla_{\bar{x}} \check{f}_2 + \frac{V_2^\circ t^\circ}{L^\circ} \bar{P}_2 \cdot \nabla_{\check{v}_2} \check{f}_2 &= t^\circ n_1^\circ (r_{min})^2 V_2^\circ \bar{R}_2(\hat{f}_1, \check{f}_2) \\
&\quad + 4\pi t^\circ n_2^\circ V_2^\circ \varrho^2 \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2),
\end{aligned} \tag{4.56}$$

où \bar{R}_1 correspond à \bar{R}_1^e , \bar{R}_1^d ou \bar{R}_1^{dm} , et \bar{R}_2 correspond à \bar{R}_2^e , \bar{R}_2^d ou \bar{R}_2^{dm} . Nous remplacerons par la suite t° par t_{22} ou t_{12} , et L° par L_1 ou L_2 afin de faire ressortir les échelles caractéristiques d'évolution des densités adimensionnées \hat{f}_1 et \check{f}_2 en fonction des paramètres ε_m , α° et η .

4.2.3 Développement asymptotique de $\bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2)$

4.2.3.1 Développement asymptotique de $\bar{R}_1^e(\hat{f}_1, \check{f}_2)$

Proposition 4.1 Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^3)$ et \bar{R}_1^e donné par (4.38). Alors, au moins formellement, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \bar{R}_1^e(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \varphi(\hat{v}_1) d\hat{v}_1 = \sqrt{\varepsilon_m} \bar{\Gamma}_a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \varphi(\hat{v}_1) \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1 + o(\sqrt{\varepsilon_m}),$$

où $\bar{\Gamma}_a(\check{f}_2)$ a pour expression

$$\bar{\Gamma}_a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) = \frac{\pi}{\bar{r}} \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) |\check{v}_2| \check{v}_2 d\check{v}_2. \quad (4.57)$$

Preuve de la Proposition 4.1. Remarquons déjà que la transformation $(\hat{v}_1, \check{v}_2) \rightarrow (\hat{v}'_1, \check{v}'_2)$, où $(\hat{v}'_1, \check{v}'_2)$ est donnée par (4.41), est encore involutive. En effet, on vérifie d'après (4.41) que

$$\omega \cdot (\check{v}'_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}'_1) = -\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1),$$

d'où l'on déduit le caractère involutif de cette transformation. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{R}_1^e(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \varphi(\hat{v}_1) d\hat{v}_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [\varphi(\hat{v}'_1) - \varphi(\hat{v}_1)] \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \\ &\quad \times \bar{q}(|\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1|, |\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)|, \bar{r}) d\omega d\check{v}_2 d\hat{v}_1, \end{aligned}$$

où \hat{v}'_1 est donné par (4.41). Comme cela a déjà été remarqué, la propriété $\hat{v}'_1 - \hat{v}_1 = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_m})$ liant les vitesses pré- et post- collisionnelles adimensionnées nous permet d'effectuer un développement limité en $\sqrt{\varepsilon_m}$ de $\varphi(\hat{v}'_1) - \varphi(\hat{v}_1)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{v}'_1) - \varphi(\hat{v}_1) &= (\hat{v}'_1 - \hat{v}_1) \cdot \nabla \varphi(\hat{v}_1) + \mathcal{O}(|\hat{v}'_1 - \hat{v}_1|^2) \\ &= 2\sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-3} [\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)] [\omega \cdot \nabla \varphi(\hat{v}_1)] + \mathcal{O}(\varepsilon_m) \\ &= 2\sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-3} [\omega \cdot \check{v}_2] [\omega \cdot \nabla \varphi(\hat{v}_1)] + \mathcal{O}(\varepsilon_m). \end{aligned} \quad (4.58)$$

De plus, d'après (4.16), on a

$$\left(\bar{r} + \left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{1/3} \right)^2 |\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)| = \bar{r}^2 |\omega \cdot \check{v}_2| + o(1). \quad (4.59)$$

On a alors

$$\begin{aligned} &[\varphi(\hat{v}'_1) - \varphi(\hat{v}_1)] \bar{q}(|\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1|, |\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)|, \bar{r}) \\ &= \sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-1} [\omega \cdot \check{v}_2] [\omega \cdot \nabla \varphi(\hat{v}_1)] |\omega \cdot \check{v}_2| + o(\sqrt{\varepsilon_m}). \end{aligned}$$

Or, pour tout élément u de \mathbb{R}^3 on a (cf. Calcul 4 de l'Annexe C)

$$\int_{\mathbb{S}^2} (u \cdot \omega) |u \cdot \omega| \omega d\omega = 2 \int_{\mathbb{S}^2} (u \cdot \omega)^2 \omega \mathbf{1}_{\{u \cdot \omega \geq 0\}} d\omega = \pi |u| u. \quad (4.60)$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \bar{R}_1^e(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \varphi(\hat{v}_1) d\hat{v}_1 \\ &= \sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-1} \pi \left(\int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) |\check{v}_2| \check{v}_2 d\check{v}_2 \right) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \varphi(\hat{v}_1) \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1 + o(\sqrt{\varepsilon_m}), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (4.57). \diamond

4.2.3.2 Développement asymptotique de $\bar{R}_1^d(\hat{f}_1, \check{f}_2)$ et de $\bar{R}_1^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2)$

Proposition 4.2 Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^3)$ et \bar{R}_1^d et \bar{R}_1^{dm} donnés par (4.44) et (4.11). Alors, au moins formellement, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\hat{v}_1) \bar{R}_1^d(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1 = \sqrt{\varepsilon_m} \bar{\Upsilon}_{a, sd}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \varphi(\hat{v}_1) \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1 + o(\sqrt{\varepsilon_m}), \quad (4.61)$$

où $\bar{\Upsilon}_{a, sd}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r})$ a pour expression

$$\bar{\Upsilon}_{a, sd}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) = \frac{\pi}{\bar{r}} \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \left[|\check{v}_2| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\bar{\beta}} \right] \check{v}_2 d\check{v}_2, \quad (4.62)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} \bar{R}_1^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \varphi(\hat{v}_1) d\hat{v}_1 = \sqrt{\varepsilon_m} \bar{\Upsilon}_{a, m}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \varphi(\hat{v}_1) \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon_m),$$

où $\bar{\Upsilon}_{a, m}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r})$ a pour expression

$$\bar{\Upsilon}_{a, m}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) = \frac{4\pi}{\bar{r}^3} \bar{C}_m(\bar{r}) n_{\check{f}_2}(\bar{t}, \bar{x}) \mathbf{u}_{\check{f}_2}(\bar{t}, \bar{x}). \quad (4.63)$$

Preuve de la Proposition 4.2. Soit φ une fonction $\mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^3)$, et \bar{R}_1^d donné par (4.44). Grâce à un changement de variable similaire à celui effectué dans la section 1.3.3 du Chapitre 1, on montre que \bar{R}_1^d se met sous la forme faible :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \bar{R}_1^d(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \varphi(\hat{v}_1) d\hat{v}_1 \\ &= \frac{2\bar{\beta}^4}{\pi} \left(\bar{r} + \left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{1/3} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [\varphi(\hat{v}_1'') - \varphi(\hat{v}_1)] \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \\ & \quad \times \exp(-\bar{\beta}^2 w^2) (n \cdot w) [n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot w > 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2) > 0\}} d\bar{n} dw d\check{v}_2 d\hat{v}_1, \end{aligned}$$

où l'expression de \hat{v}_1'' est donnée par (4.45). Puisque $\hat{v}_1'' - \hat{v}_1 = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_m})$, on effectue ici encore un développement limité au premier ordre en $\sqrt{\varepsilon_m}$ de $\varphi(\hat{v}_1'') - \varphi(\hat{v}_1)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{v}_1'') - \varphi(\hat{v}_1) &= (\hat{v}_1'' - \hat{v}_1) \cdot \nabla \varphi(\hat{v}_1) + \mathcal{O}(|\hat{v}_1'' - \hat{v}_1|^2) \\ &= \sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-3} (\check{v}_2 - w) \cdot \nabla \varphi(\hat{v}_1) + \mathcal{O}(\varepsilon_m). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Ainsi on a formellement, d'après (4.59),

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3} \bar{R}_1^d(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \varphi(\hat{v}_1) d\hat{v}_1 \\
&= \frac{2\bar{\beta}^4}{\pi\bar{r}} \sqrt{\varepsilon_m} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (\check{v}_2 - w) \cdot \nabla \varphi(\hat{v}_1) \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \exp(-\bar{\beta}^2 w^2) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{S}^2} (n \cdot w) [n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2)] \mathbb{1}_{\{w \cdot n > 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2) > 0\}} dndwd\check{v}_2 d\hat{v}_1 + o(\sqrt{\varepsilon_m}) \\
&= \frac{2\bar{\beta}^4}{\pi\bar{r}} \sqrt{\varepsilon_m} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \nabla \varphi(\hat{v}_1) \cdot [I(\hat{v}_1, \check{v}_2) - J(\hat{v}_1, \check{v}_2)] d\check{v}_2 d\hat{v}_1 + o(\sqrt{\varepsilon_m}),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
I(\hat{v}_1, \check{v}_2) &= \check{v}_2 \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2) > 0\}} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-\bar{\beta}^2 w^2) (n \cdot w) \mathbb{1}_{\{n \cdot w > 0\}} dw dn,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
J(\hat{v}_1, \check{v}_2) &= \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2) > 0\}} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} w \exp(-\bar{\beta}^2 w^2) (w \cdot n) \mathbb{1}_{\{w \cdot n > 0\}} dw dn.
\end{aligned}$$

Or, pour tout élément $n \in \mathbb{S}^2$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} (n \cdot w) \mathbb{1}_{\{n \cdot w > 0\}} \exp(-\bar{\beta}^2 w^2) dw = \frac{\pi}{2\bar{\beta}^4}, \quad (4.65)$$

d'après (1.41), et

$$\int_{\mathbb{R}^3} w (n \cdot w) \mathbb{1}_{\{n \cdot w > 0\}} \exp(-\bar{\beta}^2 w^2) dw = \frac{\pi^{3/2}}{4\bar{\beta}^5} n, \quad (4.66)$$

d'après le calcul 5 de l'Annexe C. Ainsi,

$$\begin{aligned}
I(\hat{v}_1, \check{v}_2) &= \frac{\pi}{2\bar{\beta}^4} \check{v}_2 \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2) > 0\}} dn \\
&= \frac{\pi^2}{2\bar{\beta}^4} \check{v}_2 |\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2|,
\end{aligned}$$

d'après le calcul 1 de l'Annexe C, et

$$\begin{aligned}
J(\hat{v}_1, \check{v}_2) &= \frac{\pi^{3/2}}{4\bar{\beta}^5} \int_{\mathbb{S}^2} n [n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2)] \mathbb{1}_{\{n \cdot (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2) > 0\}} dn \\
&= \frac{\pi^{5/2}}{6\bar{\beta}^5} (\sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 - \check{v}_2).
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \bar{R}_1^d(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \varphi(\hat{v}_1) d\hat{v}_1 \\ &= \frac{1}{\bar{r}} \sqrt{\varepsilon_m} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \nabla \varphi(\hat{v}_1) \cdot \check{v}_2 \left[|\check{v}_2| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] d\check{v}_2 d\hat{v}_1 + o(\sqrt{\varepsilon_m}), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (4.61) et (4.62). Ensuite, pour $\bar{R}_1^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2)$ donné sous forme faible par (4.51), on a formellement, d'après (4.64) et (4.66) :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \bar{R}_1^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \varphi(\hat{v}_1) d\hat{v}_1 \\ &= \frac{2\bar{\beta}^4}{\pi} \sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-3} \bar{C}_m(r) \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [(\check{v}_2 - w) \cdot \nabla \varphi(\hat{v}_1)] \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) \\ & \quad \times \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) (n \cdot \check{w}) \exp(-\bar{\beta}^2 |\check{w}|^2) \mathbb{1}_{\{n \cdot \check{w} \geq 0\}} dnd\check{w} d\check{v}_2 d\hat{v}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon_m) \\ &= 4\pi \sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-3} \bar{C}_m(r) n_{\check{f}_2}(\bar{t}, \bar{x}) \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}_{\check{f}_2}(\bar{t}, \bar{x}) \cdot \nabla \varphi(\hat{v}_1) \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon_m) \end{aligned}$$

car $\int_{\mathbb{S}^2} n dn = 0$. On en déduit donc l'expression (4.63). \diamond

4.2.4 Premier modèle asymptotique Vlasov/Boltzmann

Les propositions 4.1 et 4.2 nous amènent à remplacer formellement l'équation (4.55) par

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} + \frac{V_1^\circ t^\circ}{L^\circ} \left(\hat{v}_1 \cdot \nabla_{\bar{x}} \hat{f}_1 + \bar{P}_1 \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 \right) + \left[t^\circ n_2^\circ (r_{min})^2 V_2^\circ \right] \left[\sqrt{\varepsilon_m} a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 + o(\sqrt{\varepsilon_m}) \right] = 0,$$

dans laquelle $a(\check{f}_2)$ représente soit $\bar{\Gamma}_a(\check{f}_2)$, donné par (4.57), soit $\bar{\Upsilon}_{a, sd}(\check{f}_2)$, donné par (4.62), soit $\bar{\Upsilon}_{a, m}(\check{f}_2)$, donné par (4.63). Notons que le terme $a(\check{f}_2)$ ne dépend plus ni de la variable \hat{v}_1 , ni de ε_m .

Nous introduisons alors un système asymptotique, couplant une équation de Vlasov et une équation de Boltzmann, dans lequel l'équation de Vlasov approche formellement l'équation (4.56) au premier ordre en $\sqrt{\varepsilon_m}$. Celui-ci nous permettra d'étudier formellement le comportement du système gaz-poussière à différentes échelles de temps.

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} + \frac{V_1^\circ t^\circ}{L^\circ} \hat{v}_1 \cdot \nabla_{\bar{x}} \hat{f}_1 + \frac{V_1^\circ t^\circ}{L^\circ} \bar{P}_1 \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 + t^\circ n_2^\circ (r_{min})^2 V_2^\circ \sqrt{\varepsilon_m} a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 = 0 \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} + \frac{V_2^\circ t^\circ}{L^\circ} \check{v}_2 \cdot \nabla_{\bar{x}} \check{f}_2 + \frac{V_2^\circ t^\circ}{L^\circ} \bar{P}_2 \cdot \nabla_{\check{v}_2} \check{f}_2 &= t^\circ n_1^\circ (r_{min})^2 V_2^\circ \bar{R}_2(\hat{f}_1, \check{f}_2) \\ &+ 4\pi t^\circ n_2^\circ V_2^\circ \varrho^2 \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2), \end{aligned} \quad (4.68)$$

Remarque 4.1 Supposons que \hat{f}_1 et \check{f}_2 ne dépendent plus de \bar{r} ni de \bar{x} , et considérons le système homogène en espace composé des équations

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial t} + \sqrt{\varepsilon_m} \bar{\Upsilon}_{a,m}(\check{f}_2) \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 &= 0, \\ \frac{\partial \check{f}_2}{\partial t} &= \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2) + \bar{R}_2^{dm}(\hat{f}_1, \check{f}_2),\end{aligned}$$

où

$$\bar{\Upsilon}_{a,m}(\check{f}_2)(\bar{t}) = \frac{4\pi}{\bar{r}^3} \bar{C}_m n_{\check{f}_2}(\bar{t}) \mathbf{u}_{\check{f}_2}(\bar{t}).$$

Alors, on a formellement :

$$\frac{d}{d\bar{t}} n_{\hat{f}_1} = 0, \quad \frac{d}{d\bar{t}} n_{\check{f}_2} = 0,$$

ce qui permet d'obtenir, toujours formellement,

$$\frac{d}{d\bar{t}} \mathbf{u}_{\hat{f}_1} = \sqrt{\varepsilon_m} \frac{4\pi}{\bar{r}^3} \bar{C}_m n_{\check{f}_2} \mathbf{u}_{\check{f}_2}, \quad (4.69)$$

et

$$\frac{d}{d\bar{t}} \mathbf{u}_{\check{f}_2} = 4\pi \bar{C}_m n_{\hat{f}_1} \left(\sqrt{\varepsilon_m} \mathbf{u}_{\hat{f}_1} - \mathbf{u}_{\check{f}_2} \right). \quad (4.70)$$

On observe alors que si $\mathbf{u}_{\hat{f}_1}$ et $\mathbf{u}_{\check{f}_2}$ possèdent des limites finies lorsque $t \rightarrow \infty$, celles-ci sont, d'après les équations (4.69) et (4.70), nécessairement identiques et nulles. Ce modèle n'a donc pas en temps long un comportement similaire à celui du modèle

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial t} &= R_1^{dm}(f_1, f_2), \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} &= R_2^{dm}(f_1, f_2) + Q(f_2, f_2),\end{aligned}$$

pour lequel les vitesses macroscopiques convergent lorsque $t \rightarrow \infty$ vers une unique vitesse limite $\mathbf{u}_\varepsilon^\infty$ non nécessairement nulle (cf. Chapitre 3).

4.2.5 Étude du système à différentes échelles de temps

4.2.5.1 Cas où $t^\circ = t_{12}$ et $L^\circ = L_1$.

On se place ici aux échelles de temps et d'espace relatives aux particules de poussière. Ces deux échelles sont les plus petites du système molécules-poussière. Rappelons que t_{12} est défini par

$$t_{12} = \frac{1}{n_2 V_2^\circ \pi (r_{min})^2},$$

et que L_1 est définie par $L_1 = V_1^\circ t^\circ$. Compte tenu de (4.22), les équations (4.67) et (4.68) deviennent :

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} + \hat{v}_1 \cdot \nabla_{\bar{x}} \hat{f}_1 + \bar{P}_1 \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 + \frac{\sqrt{\varepsilon_m}}{\pi} a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 = 0, \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m}} \check{v}_2 \cdot \nabla_{\bar{x}} \check{f}_2 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m}} \bar{P}_2 \cdot \nabla_{\check{v}_2} \check{f}_2 = \frac{\alpha^\circ}{\pi} \bar{R}_2(\hat{f}_1, \check{f}_2) + 4 \left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{2/3} \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2). \quad (4.72)$$

D'après les hypothèses (4.15) et (4.14), on constate que l'équation (4.71) est proche de l'équation

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} + \hat{v}_1 \cdot \nabla_{\bar{x}} \hat{f}_1 + \bar{P}_1 \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 = 0,$$

qui correspond à l'équation de transport de particules de poussière uniquement soumis à la gravité. De plus, d'après l'hypothèse (4.19), on a

$$4 \left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{2/3} \sim \frac{\alpha^\circ}{\pi} \ll 1.$$

Ainsi, l'équation (4.72) est proche de l'équation de transport non collisionnelle

$$\frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m}} \check{v}_2 \cdot \nabla_{\bar{x}} \check{f}_2 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m}} \bar{P}_2 \cdot \nabla_{\check{v}_2} \check{f}_2 = 0,$$

dans laquelle la rétroaction des particules de poussière sur le gaz est en particulier inexistante. Ce choix d'échelle spatiale et temporelle est donc inadéquat pour l'étude du système gaz-poussière.

4.2.5.2 Cas où $t^\circ = t_{12}$, $L^\circ = L_2$

On se place encore ici à l'échelle de temps des collisions entre particules de poussière et molécules (vue des particules), mais cette fois à l'échelle d'espace des molécules (L_2 , définie par $L_2 = V_2^\circ t^\circ$, correspond ici à la distance moyenne parcourue par les molécules durant le temps t_{12}). Compte tenu de (4.25) et (4.22), les équations (4.67) et (4.68) deviennent :

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} + \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 \cdot \nabla_{\bar{x}} \hat{f}_1 + \sqrt{\varepsilon_m} \bar{P}_1 \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{\varepsilon_m} a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 = 0, \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} + \check{v}_2 \cdot \nabla_{\bar{x}} \check{f}_2 + \bar{P}_2 \cdot \nabla_{\check{v}_2} \check{f}_2 = \frac{\alpha^\circ}{\pi} \bar{R}_2(\hat{f}_1, \check{f}_2) + 4 \left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{2/3} \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2), \quad (4.74)$$

D'après (4.14), (4.15), ces équations sont proches des équations suivantes :

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} = 0,$$

et

$$\frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} + \check{v}_2 \cdot \nabla_{\bar{x}} \check{f}_2 + \bar{P}_2 \cdot \nabla_{\check{v}_2} \check{f}_2 = 0.$$

À cette échelle de temps et d'espace la densité \hat{f}_1 est donc constante, et la densité \check{f}_2 est solution d'une équation de transport non collisionnelle. Ce choix d'échelle est donc également inadéquat.

4.2.5.3 Cas où $t^\circ = t_{22}$ et $L^\circ = L_2$.

Les échelles choisies ici sont celles relatives aux molécules. De plus, on pose

$$c = \frac{\alpha^\circ}{4\pi} \left(\frac{\eta}{\varepsilon_m} \right)^{2/3}.$$

D'après (4.19), cette constante est de l'ordre de 1. Compte tenu de (4.22) et (4.25), les équations (4.67) et (4.68) deviennent :

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} + \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 \cdot \nabla_{\bar{x}} \hat{f}_1 + \sqrt{\varepsilon_m} \bar{P}_1 \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 + c \frac{\sqrt{\varepsilon_m}}{\alpha^\circ} a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 = 0, \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} + \check{v}_2 \cdot \nabla_{\bar{x}} \check{f}_2 + \bar{P}_2 \cdot \nabla_{\check{v}_2} \check{f}_2 = c \bar{R}_2(\hat{f}_1, \check{f}_2) + \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2). \quad (4.76)$$

Dans le contexte déjà évoqué de molécules d'azote et de particules de poussière de tungstène de rayon minimum $r_{min} = 5 \cdot 10^{-7}$ m, et pour un rapport de densité $\alpha^\circ = 10^{-6}$, le rapport $\frac{\sqrt{\varepsilon_m}}{\alpha^\circ}$ est de l'ordre de l'unité. Ce choix d'échelle semble donc être le plus adapté pour l'étude, tant théorique que numérique, du système gaz-poussière. On peut de plus remarquer qu'en raison du facteur $\sqrt{\varepsilon_m}$ devant le terme de variation spatiale $\hat{v} \cdot \nabla_{\bar{x}} \hat{f}_1$, le déplacement des particules de poussière sera faible comparé à celui des molécules. Par ailleurs, le facteur $\sqrt{\varepsilon_m}$ devant le terme $\bar{P}_1 \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1$ nous suggère que l'influence sur les particules de poussière de la gravité est (puisque $\alpha^\circ \ll 1$) minime comparativement à l'influence du gaz, qui correspond au terme $c \frac{\sqrt{\varepsilon_m}}{\alpha^\circ} a(\check{f}_2) \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1$.

De plus, en notant

$$\xi = \frac{\alpha^\circ}{\sqrt{\varepsilon_m}},$$

on peut passer formellement à la limite dans le système (4.75)–(4.76) lorsque $\varepsilon_m \rightarrow 0$ et que le rapport ξ reste fixé. Le système limite s'écrit alors, dans le cas spatialement homogène et en l'absence de gravité,

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} + \frac{c}{\xi} a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \nabla_{\hat{v}_1} \hat{f}_1 = 0, \\ \frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} = c \bar{R}_{2,limite}(\hat{f}_1, \check{f}_2) + \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2), \end{cases} \quad (4.77)$$

où $\bar{R}_{2,limite}$ est obtenu en passant à la limite lorsque $\varepsilon_m \rightarrow 0$ dans les expressions de la vitesse post-collisionnelle \check{v}'_2 donnée par (4.41) ou \check{v}''_2 donnée par (4.45). En particulier, dans le cas du modèle élastique, l'opérateur $\bar{R}_2^e(\hat{f}_1, \check{f}_2)$ a formellement pour limite

$$\bar{R}_{2,limite}^e(\hat{f}_1, \check{f}_2) = \frac{1}{2} m(\hat{f}_1) L(\check{f}_2),$$

où

$$m(\hat{f}_1)(\bar{t}) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \hat{f}_1(\bar{t}, \hat{v}_1, \bar{r}) \bar{r}^2 d\bar{r} d\hat{v}_1,$$

et

$$L(\check{f}_2)(\bar{t}) = \int_{\mathbb{S}^2} \left[\check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2 - 2(\omega \cdot \check{v}_2)\omega) - \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \right] |\omega \cdot \check{v}_2| d\omega.$$

Nous justifierons au Chapitre 5 ce passage à la limite de façon rigoureuse : nous montrerons que les solutions du système homogène en espace

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} &= \frac{c}{\xi \sqrt{\varepsilon_m}} \bar{R}_1^e(\hat{f}_1, \check{f}_2), \\ \frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} &= c \bar{R}_2^e(\hat{f}_1, \check{f}_2) + \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2), \end{cases} \quad (4.78)$$

(dont nous avons prouvé l'existence au Chapitre 2) convergent faiblement lorsque $\varepsilon_m \rightarrow 0$ pour un rapport ξ constant vers un couple de solution du système (4.77).

Remarque 4.2 *Remarquons qu'on a (formellement)*

$$\frac{d}{dt} m(\hat{f}_1) = 0.$$

Ainsi, la seconde équation du système (4.77) ne dépend pas de $\hat{f}_1(\bar{t}, \hat{v}_1, \bar{r})$ mais de $\hat{f}_1(0, \hat{v}_1, \bar{r})$. La densité \check{f}_2 évolue donc, dans le cas de ce système, indépendamment de la densité \hat{f}_1 .

4.3 Second modèle asymptotique

Le modèle asymptotique précédent ne semble pas présenter, comme on l'a montré dans la remarque (4.1) dans le cas particulier d'une section pseudo-maxwellienne et dans le cas homogène en espace, un comportement satisfaisant en temps long du point de vue des vitesses macroscopiques. Nous confirmerons ce point numériquement au Chapitre 6.

Nous proposons dans cette partie d'adimensionner les vitesses des particules et des molécules à partir du même ordre de grandeur, noté V° .

4.3.1 Second adimensionnement

On adimensionne dans cette section les variables relatives aux molécules de gaz de la même façon que celles relatives aux particules ; seules les densités f_1 et f_2 sont adimensionnées de façon différente en raison des ordres de grandeur des densités n_1° et n_2° différents. Soit t° l'échelle de temps et L° l'échelle d'espace que l'on choisit pour simplifier telle que $L^\circ = V^\circ t^\circ$. On adimensionne les variables en posant ici

$$\widetilde{v}_1 = \frac{v_1}{V^\circ}, \quad \text{et} \quad \widetilde{v}_2 = \frac{v_2}{V^\circ},$$

pour les vitesses des particules de poussière et les molécules, et

$$\widetilde{x} = \frac{x}{L^\circ}, \quad \widetilde{t} = \frac{t}{t^\circ}, \quad \widetilde{r} = \frac{r}{r_{min}}.$$

Les densités f_1 et f_2 sont adimensionnées en posant

$$\check{f}_1(\widetilde{t}, \widetilde{x}, \widetilde{v}_1, \widetilde{r}) = \frac{f_1(t, x, v_1, r)}{n_1^\circ} (V^\circ)^3 r_{min},$$

et

$$\dot{f}_2(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}_2) = \frac{f_2(t, x, v_2)}{n_2^\circ} (V^\circ)^3.$$

On peut ensuite écrire

$$R_1(f_1, f_2)(t, x, v, r) = n_1^\circ n_2^\circ \frac{1}{(V^\circ)^2} r_{\min} \tilde{R}(\dot{f}_1, \dot{f}_2)(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}_1, \tilde{r}),$$

où l'opérateur adimensionné $\tilde{R}(\dot{f}_1, \dot{f}_2)$ est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{R}^e(\dot{f}_1, \dot{f}_2)(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}_1, \tilde{r}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left[\dot{f}_1(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}_1', \tilde{r}) \dot{f}_2(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}_2') - \dot{f}_1(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}_1, \tilde{r}) \dot{f}_2(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}_2) \right] \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left(\tilde{r} + \frac{\varrho}{r_{\min}} \right)^2 |\omega \cdot (\tilde{v}_2 - \tilde{v}_1)| d\omega d\tilde{v}_2, \end{aligned} \quad (4.79)$$

dans le cas de l'opérateur élastique $R_1^e(f_1, f_2)$, avec

$$\begin{cases} \tilde{v}_1' = \tilde{v}_1 + \frac{2\tilde{r}^{-3}\varepsilon_m}{1 + \tilde{r}^{-3}\varepsilon_m} [\omega \cdot (\tilde{v}_2 - \tilde{v}_1)] \omega, \\ \tilde{v}_2' = \tilde{v}_2 - \frac{2}{1 + \tilde{r}^{-3}\varepsilon_m} [\omega \cdot (\tilde{v}_2 - \tilde{v}_1)] \omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1^d(\dot{f}_1, \dot{f}_2)(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}_1, \tilde{r}) &= \frac{2\tilde{\beta}^4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)] [n \cdot \tilde{w}] \mathbb{1}_{\{n \cdot (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) > 0\}} \mathbb{1}_{\{n \cdot \tilde{w} > 0\}} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{\varrho}{r} \right)^2 \left[\dot{f}_1(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}_1'', \tilde{r}) \dot{f}_2(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}_2'') \exp \left(-\tilde{\beta}^2 (\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \dot{f}_1(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}_1, \tilde{r}) \dot{f}_2(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}_2) \exp \left(-\tilde{\beta}^2 (\tilde{v}_1'' - \tilde{v}_2'')^2 \right) \right] dnd\tilde{w}d\tilde{v}_2, \end{aligned} \quad (4.80)$$

où $\tilde{\beta}$ est défini par $\tilde{\beta} = \beta V^\circ$, et

$$\begin{cases} \tilde{v}_1'' = \frac{1}{1 + \tilde{r}^{-3}\varepsilon_m} \left[\tilde{v}_1 + \tilde{r}^{-3}\varepsilon_m \tilde{v}_2 - \tilde{r}^{-3}\varepsilon_m \tilde{w} \right], \\ \tilde{v}_2'' = \frac{1}{1 + \tilde{r}^{-3}\varepsilon_m} \left[\tilde{v}_1 + \tilde{r}^{-3}\varepsilon_m \tilde{v}_2 + \tilde{w} \right], \end{cases}$$

dans le cas de l'opérateur de réflexion diffuse $R_1^d(f_1, f_2)$. On constate alors qu'il est équivalent d'effectuer le développement asymptotique en ε_m de l'opérateur R_1 à partir des formes adimensionnées (4.79) et (4.80) ou à partir des formes non-adimensionnées (4.3) et (4.7). Pour alléger l'écriture, nous raisonnerons donc dans la suite à partir des formes non adimensionnées des densités et des opérateurs.

4.3.2 Développement asymptotique de $R_1(f_1, f_2)$

4.3.2.1 Développement asymptotique de $R_1^e(f_1, f_2)$

Proposition 4.3 Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^3)$, et R_1^e donnée par (4.3). Alors, au moins formellement,

$$\int_{\mathbb{R}^3} R_1^e(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) \varphi(v_1) dv_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma_b(f_2)(t, x, v_1, r) \cdot \nabla \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1, r) dv_1 + o(\varepsilon_m),$$

où $\Gamma_b(f_2)$ a pour expression

$$\Gamma_b(f_2)(t, x, v_1, r) = \pi \varepsilon_m \frac{r_{min}^3}{r} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) |v_2 - v_1| (v_2 - v_1) dv_2. \quad (4.81)$$

Preuve de la Proposition 4.3. On procède de la même façon que dans la Proposition 4.1. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} R_1^e(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) \varphi(v_1) dv_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [\varphi(v'_1) - \varphi(v_1)] f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \\ &\quad \times \frac{(r_{min})^2}{2} \left(\frac{r}{r_{min}} + \left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{1/3} \right)^2 |\omega \cdot (v_2 - v_1)| d\omega dv_2 dv_1, \end{aligned}$$

avec

$$v'_1 = v_1 + \frac{2\varepsilon_m r_{min}^3}{r^3 + \varepsilon_m r_{min}^3} [\omega \cdot (v_2 - v_1)] \omega.$$

Ainsi

$$\varphi(v'_1) - \varphi(v_1) = 2\varepsilon_m \left(\frac{r_{min}}{r} \right)^3 [\omega \cdot (v_2 - v_1)] [\omega \cdot \nabla \varphi(v_1)] + \mathcal{O}(\varepsilon_m^2),$$

et on a formellement, d'après (4.16),

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v_1) R_1^e(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) dv_1 \\ &= \varepsilon_m \frac{(r_{min})^3}{r} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \\ &\quad \times \nabla \varphi(v_1) \cdot \int_{\mathbb{S}^2} \omega [\omega \cdot (v_2 - v_1)] |\omega \cdot (v_2 - v_1)| d\omega dv_2 dv_1 + o(\varepsilon_m). \end{aligned}$$

On obtient, d'après le calcul (4.60),

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v_1) R_1^{e, sd}(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) dv_1 \\ &= \pi \varepsilon_m \frac{(r_{min})^2}{r} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \nabla \varphi(v_1) \cdot (v_2 - v_1) |v_2 - v_1| dv_2 dv_1 + o(\varepsilon_m), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (4.81). \diamond

4.3.2.2 Développement asymptotique de $R_1^d(f_1, f_2)$

Proposition 4.4 Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^3)$, et R_1^d donné sous forme faible par (4.7). Alors, au moins formellement,

$$\int_{\mathbb{R}^3} R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) \varphi(v_1) dv_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \Upsilon_{b, sd}(f_2)(t, x, v_1, r) \cdot \nabla \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1, r) dv_1 + o(\varepsilon_m),$$

où $\Upsilon_{b, sd}(f_2)$ a pour expression

$$\Upsilon_{b, sd}(f_2)(t, x, v_1, r) = \pi \varepsilon_m \frac{(r_{min})^3}{r} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) \left[|v_2 - v_1| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] (v_2 - v_1) dv_2, \quad (4.82)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v_1) R_1^{dm}(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) dv_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \Upsilon_{b,m}(f_2)(t, x, v_1, r) \cdot \nabla \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1, r) dv_1 + \mathcal{O}(\varepsilon_m^2),$$

où $\Upsilon_{b,m}(f_2)$ a pour expression

$$\Upsilon_{b,m}(f_2)(t, x, v_1, r) = 4\pi\varepsilon_m C_m(r) \left(\frac{r_{min}}{r}\right)^3 n_{f_2}(t, x) (\mathbf{u}_{f_2}(t, x) - v_1). \quad (4.83)$$

Preuve de la Proposition 4.4. D'après la Proposition 1.4 du Chapitre 1, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v, r) \varphi(v) dv \\ &= r_{min}^2 \left(\frac{r}{r_{min}} + \left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{1/3} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [\varphi(v_1'') - \varphi(v_1)] f_1(t, x, v_1, r) \\ & \quad \times f_2(t, x, v_2) h_n(w) [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbf{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) > 0\}} dndwdv_2 dv_1, \end{aligned}$$

où

$$v_1'' = \frac{1}{1 + \varepsilon_m \left(\frac{r_{min}}{r}\right)^3} \left(v_1 + \varepsilon_m \left(\frac{r_{min}}{r}\right)^3 v_2 - \varepsilon_m \left(\frac{r_{min}}{r}\right)^3 w \right),$$

et h_n définie par (4.13). Ainsi

$$\varphi(v_1'') - \varphi(v_1) = \varepsilon_m \left(\frac{r_{min}}{r}\right)^3 (v_2 - w - v_1) \cdot \nabla \varphi(v_1) + \mathcal{O}(\varepsilon_m^2), \quad (4.84)$$

et on a, formellement,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v, r) \varphi(v) dv \\ &= \varepsilon_m \frac{(r_{min})^3}{r} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} (v_2 - w - v_1) \cdot \nabla \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \\ & \quad \times h_n(w) [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbf{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) > 0\}} dndwdv_2 dv_1 + o(\varepsilon_m) \\ &= \varepsilon_m \frac{(r_{min})^3}{r} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (I(v_1, v_2) - J(v_1, v_2)) \cdot \nabla \varphi(v_1) \\ & \quad \times f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) dv_2 dv_1 + o(\varepsilon_m). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} I(v_1, v_2) &= (v_2 - v_1) \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbf{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) > 0\}} \int_{\mathbb{R}^3} h_n(w) dw dn \\ &= \pi (v_2 - v_1) |v_2 - v_1|, \end{aligned}$$

d'après (1.41) et le calcul 1 de l'Annexe C, et

$$\begin{aligned} J(v_1, v_2) &= \int_{\mathbb{S}^2} [n \cdot (v_1 - v_2)] \mathbf{1}_{\{n \cdot (v_1 - v_2) > 0\}} \int_{\mathbb{R}^3} h_n(w) w dw dn \\ &= \frac{\pi^{3/2}}{3\beta} (v_1 - v_2), \end{aligned}$$

d'après les calculs 2 et 5 de l'Annexe C. Ainsi

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v, r) \varphi(v) dv \\ &= \varepsilon_m \frac{(r_{\min})^3}{r} \pi \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \left[|v_2 - v_1| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] (v_2 - v_1) \cdot \nabla \varphi(v_1) dv_2 dv_1 \\ & \quad + o(\varepsilon_m), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (4.82). Par ailleurs, on a d'après (4.84)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} R_1^{dm}(f_1, f_2)(t, x, v, r) \varphi(v) dv \\ &= C_m(r) \varepsilon_m \left(\frac{r_{\min}}{r} \right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [(v_2 - w - v_1) \cdot \nabla \varphi(v_1)] f_1(t, x, v_1, r) f_2(t, x, v_2) \\ & \quad \times h_n(w) dndw dv_2 dv_1 + \mathcal{O}(\varepsilon_m^2) \\ &= 4\pi C_m(r) \varepsilon_m \left(\frac{r_{\min}}{r} \right)^3 n_{f_2}(t, x) \int_{\mathbb{R}^3} [(\mathbf{u}_{f_2}(t, x) - v_1) \cdot \nabla \varphi(v_1)] f_1(t, x, v_1, r) dv_1 + \mathcal{O}(\varepsilon_m^2), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (4.83). \diamond

4.3.3 Second modèle asymptotique Vlasov/Boltzmann

Les propositions 4.3 et 4.4 nous conduisent à remplacer formellement l'équation

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_x f_1 + \frac{F_1}{m_1(r)} \cdot \nabla_v f_1 = R_1(f_1, f_2) \quad (4.85)$$

par l'équation

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_x f_1 + \frac{F_1}{m_1(r)} \cdot \nabla_v f_1 + \varepsilon_m \operatorname{div}_{v_1} (b(f_2) f_1) + o(\varepsilon_m) = 0,$$

dans laquelle $\varepsilon_m b(f_2)$ a pour expression $\Gamma_b(f_2)$, $\Upsilon_{b, sd}(f_2)$ ou $\Upsilon_{b, m}(f_2)$, données respectivement par (4.81), (4.82) ou (4.83). Nous introduisons alors un système asymptotique, couplant une équation de Vlasov et une équation de Boltzmann, dans lequel l'équation de Vlasov approche formellement l'équation (4.85) au premier ordre en ε_m :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_x f_1 + \frac{F_1}{m_1(r)} \cdot \nabla_v f_1 + \varepsilon_m \operatorname{div}_{v_1} (b(f_2) f_1) = 0, \\ & \frac{\partial f_2}{\partial t} + v_2 \cdot \nabla_x f_2 + \frac{F_2}{m_2} \cdot \nabla_v f_2 = Q(f_2, f_2) + R_2(f_1, f_2). \end{aligned}$$

Le terme

$$\mathbf{F}_d(t, x, v_1, r) = m_1(r) \varepsilon_m b(f_2)(t, x, v_1, r)$$

définit une force de traînée exercée par le gaz sur les particules. Notons que contrairement aux modèles de forces de traînée utilisés dans [BZ, Cr] par exemple, ces expressions ne

contiennent pas de coefficient empirique, et restent valable quelque soit la distribution du gaz f_2 . Par ailleurs, ces expressions de $b(f_2)$ permettent, sous certaines conditions aux limites (ou dans le cas spatialement homogène) de préserver la quantité de mouvement du système, contrairement au système (4.67)–(4.68). En revanche, elles dépendent cette fois de la variable v_1 , ce qui rend leur simulation numérique plus coûteuse que les expressions $a(\check{f}_2)$ introduites dans la section 4.2.4. Nous comparerons numériquement ces deux modèles au Chapitre 6.

Chapitre 5

Étude de la convergence faible des solutions à un couplage Boltzmann/ Boltzmann vers une solution d'un couplage Vlasov/Boltzmann

Sommaire

5.1	Introduction	176
5.2	Relations of conservation of mass, energy and entropy	184
5.3	Boundedness of Moments of order $\gamma > 2$	185
5.4	Weak convergence of equations (5.21) – (5.22)	192

Ce chapitre est constitué en partie d'un article écrit en collaboration avec L. Desvillettes¹, *Small Mass Ratio Limit of Boltzmann Equations in the Context of the Study of Evolution of Dust Particles in a Rarefied Atmosphere*, accepté pour publication (sous réserve de modifications mineures) à la revue *Journal of Statistical Physics*.

5.1 Introduction

In this Chapter, we give a rigorous proof of the passage to the limit in a spatially homogeneous setting of the coupling of Boltzmann equations introduced in Chapter 2 to the Vlasov-Boltzmann coupling (4.75)–(4.76) introduced in Chapter 4, when the ratio of masses between a molecule and a dust speck tends to zero.

The unknowns are the density $f_2 := f_2(t, x, v) \geq 0$ of molecules (of radius ϱ and mass m_2) which at time t and point x move with velocity v , and the density $f_1 := f_1(t, x, v, r) \geq 0$ of specks of dust (assumed to be spherical for the sake of simplicity) which at time t , point x , have velocity v and radius r . Here $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \Omega$ an open bounded and regular subset of \mathbb{R}^3 , $v \in \mathbb{R}^3$ and $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ with $0 < r_{\min} < r_{\max}$. The coupling of Boltzmann equations describing the gas-dust mixture writes :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_1 = R_1^e(f_1, f_2), \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_2 = R_2^e(f_1, f_2) + Q(f_2, f_2), \quad (5.2)$$

where R_1^e , R_2^e , Q are the collision kernels introduced in the previous Chapters, defined by

$$R_1^e(f_1, f_2)(v_1, r) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_1(v'_1, r) f_2(v'_2) - f_1(v_1, r) f_2(v_2)] \frac{(\varrho + r)^2}{2} |\omega \cdot (v_2 - v_1)| d\omega dv_2, \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} R_2^e(f_1, f_2)(v_2) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} [f_1(v'_1, r) f_2(v'_2) - f_1(v_1, r) f_2(v_2)] \\ &\quad \times \frac{(\varrho + r)^2}{2} |\omega \cdot (v_2 - v_1)| dr d\omega dv_1, \end{aligned} \quad (5.4)$$

with

$$\begin{cases} v'_1 &= v_1 + \frac{2\varepsilon(r)}{1 + \varepsilon(r)} [\omega \cdot (v_2 - v_1)] \omega, \\ v'_2 &= v_2 - \frac{2}{1 + \varepsilon(r)} [\omega \cdot (v_2 - v_1)] \omega, \end{cases} \quad (5.5)$$

and

¹CMLA, ENS Cachan, CNRS & IUF, PRES UniverSud, 61 Av. du Pdt. Wilson, 94235 Cachan Cedex, France. E-mail : desville@cmla.ens-cachan.fr

$$Q(f_2, f_2)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_2(v') f_2(v'_*) - f_2(v) f_2(v_*)] B \left(|v - v_*|, \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \sigma \right) d\sigma dv_*, \quad (5.6)$$

with

$$\begin{cases} v' &= \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \\ v'_* &= \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma. \end{cases} \quad (5.7)$$

In relations (5.5), $\varepsilon(r)$ represents the ratio of mass between a molecule and a dust speck of radius r (that is, $\varepsilon(r) = (r_{\min}/r)^3 \varepsilon(r_{\min})$). We have assumed that the collision kernels R_1^e, R_2^e corresponding to the interaction between molecules and specks of dust are of hard sphere type. This assumption is however not typical for collisions between molecules, and we consider instead that the cross section B is of variable hard sphere (VHS) type :

$$B(y, z) = C_{eff} y^\delta, \quad (5.8)$$

with $C_{eff} > 0$ and $\delta \in]0, 1]$. This cross section is widely used in DSMC methods. Note that the rest of our paper would still hold if C_{eff} were a (smooth) function of z (that is, in the case of smoothly cutoff hard potentials). For the sake of readability, we now denote R_1 and R_2 the operators given by (5.3) and (5.4) instead of R_1^e and R_2^e .

The mathematical study of spatially homogeneous solutions to eq. (5.1) – (5.2) can be done in the same spirit as in [Ar]. It leads to the following Proposition, which is a direct consequence of the Theorem 2.1 of Chapter 2 (where the kernel B is more general than (5.8)) :

Proposition 5.1 *Let $f_{1,in} := f_{1,in}(v, r) > 0$ be an initial datum such that*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_{1,in}(v, r) (1 + |v|^2 + |\ln f_{1,in}(v, r)|) dr dv < +\infty,$$

and $f_{2,in} := f_{2,in}(v) > 0$ be an initial datum such that

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) (1 + |v|^2 + |\ln f_{2,in}(v)|) dv < +\infty.$$

Then for all $C_{eff} > 0$, $\delta \in]0, 1]$, $0 < r_{\min} < r_{\max}$ (constants appearing in the definition of R_1, R_2, Q), there exists a spatially homogeneous weak solution $(f_1 : (t, r, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times [r_{\min}, r_{\max}] \mapsto f_1(t, v, r) \geq 0, f_2 : (t, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \mapsto f_2(t, v) \geq 0)$ to eq. (5.1) – (5.2) such that

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} f_1(t, v, r) (1 + |v|^2 + |\ln f_1(t, v, r)|) dr dv < +\infty,$$

and

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) (1 + |v|^2 + |\ln f_2(t, v)|) dv < +\infty.$$

It satisfies moreover (for all $t \in \mathbb{R}^+$), the conservation of mass

$$\text{for a.e. } r \in [r_{\min}, r_{\max}], \quad \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, v, r) dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_{1,in}(v, r) dv, \quad (5.9)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) dv, \quad (5.10)$$

and the following entropy inequality

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, v_1, r) \ln(f_1(t, v_1, r)) dr dv_1 + \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v_2) \ln(f_2(t, v_2)) dv_2 \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_{1,in}(v_1, r) \ln(f_{1,in}(v_1, r)) dr dv_1 + \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v_2) \ln(f_{2,in}(v_2)) dv_2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Finally, if for some $s \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} (1 + |v|^2)^s [f_{1,in}(v, r) + f_{2,in}(v)] dr dv < +\infty,$$

then (one can find f_1, f_2 in such a way that) for all $T > 0$,

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} (1 + |v|^2)^s [f_1(t, v, r) + f_2(t, v)] dr dv < +\infty, \quad (5.12)$$

and the following relation of conservation of energy holds :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, v, r) |v|^2 \left(\frac{r}{r_{min}} \right)^3 dr dv + \varepsilon_m \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) |v|^2 dv \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_{1,in}(v, r) |v|^2 \left(\frac{r}{r_{min}} \right)^3 dr dv + \varepsilon_m \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) |v|^2 dv, \end{aligned} \quad (5.13)$$

where $\varepsilon_m = \varepsilon(r_{min})$. By a weak solution, we mean here that for all $T > 0$,

$$(f_1, f_2) \in \text{Lip} \left(\mathbb{R}^+, L^1 \left(\mathbb{R}^3 \times [r_{min}, r_{max}] \right) \right) \times \text{Lip} \left(\mathbb{R}^+, L^1 \left(\mathbb{R}^3 \right) \right),$$

and (f_1, f_2) satisfies for all $t \geq 0$, and a.e. $v \in \mathbb{R}^3$, $r \in [r_{min}, r_{max}]$,

$$f_1(t, v, r) = f_{1,in}(v, r) + \int_0^t R_1(f_1, f_2)(s, v, r) ds,$$

$$f_2(t, v) = f_{2,in}(v) + \int_0^t (Q(f_2, f_2)(s, v) + R_2(f_1, f_2)(s, v)) ds.$$

The set of (spatially inhomogeneous) eq. (5.1), (5.2) can be simulated at the numerical level by a DSMC method (Cf. [Bi3], [N] for example). We refer to Chapter 3 for a presentation of this method and numerical results. However, we show in Chapter 3 that when the mass ratio between the molecules and the specks of dust becomes too small, the simulation becomes too expensive. It is therefore necessary when the dust specks are “too big” (in practice, for the applications that we have in mind, when their typical radius is bigger than 10^{-8} m) to write down a model in which the mass ratio $\varepsilon(r)$ vanishes.

In order to do so, we perform a dimensional analysis leading to a non-dimensional form of the equations. Our assumptions concern cases in which the number of dust particles is very small in front of the number of molecules, and in which the radii of different dust particles are of the same order of magnitude. We introduce, like in Chapter 4 a time scale

t° , which is here the typical collision time of two molecules (denoted t_{22} in the Chapter 4), a typical length scale L which corresponds to the mean free path of molecules (denoted L_2 in the Chapter 4), and, like in [DL1], two different scales V_1° and V_2° for the velocities of particles of dust and molecules respectively (they correspond to the thermal velocities of the species). We assume here that the order of magnitude of the kinetic temperature of the two species are identical and we denote them by T° . Under this assumption, V_1° and V_2° are defined by (4.20) and (4.21), and are related by the formula

$$V_1^\circ = \sqrt{\varepsilon_m} V_2^\circ. \quad (5.14)$$

Contrary to the assumptions made in [DL1], we introduce here two different orders of magnitude n_1° and n_2° for the number density of the species, and we define by

$$\alpha^\circ = \frac{n_1^\circ}{n_2^\circ} \quad (5.15)$$

the ratio of these magnitudes. In the applications that we have in mind, this ratio is very small. Then, we introduce the adimensional densities in the phase space :

$$\hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) = \frac{(V_1^\circ)^3 r_{min}}{n_1^\circ} f_1(t, x, v, r),$$

and

$$\check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) = \frac{(V_2^\circ)^3}{n_2^\circ} f_2(t, x, v_2),$$

where \bar{x} , \bar{t} , \hat{v}_1 and \check{v}_2 are the adimensional variables defined by

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^\circ}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_{min}}, \quad \hat{v}_1 = \frac{v_1}{V_1^\circ}, \quad \check{v}_2 = \frac{v_2}{V_2^\circ},$$

where

$$t^\circ = \frac{1}{4\pi n_2^\circ \rho^2 V_2^\circ}, \quad L = t^\circ V_2^\circ,$$

and f_1, f_2 are solutions to eq. (5.1) – (5.7). The densities (\hat{f}_1, \check{f}_2) are then solutions to the following system of equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \bar{t}} + \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1 \cdot \nabla_{\bar{x}} \hat{f}_1 &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\eta}{\varepsilon_m} \right)^{2/3} \bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2), \\ \frac{\partial \check{f}_2}{\partial \bar{t}} + \check{v}_2 \cdot \nabla_{\bar{x}} \check{f}_2 &= \frac{\alpha^\circ}{4\pi} \left(\frac{\eta}{\varepsilon_m} \right)^{2/3} \bar{R}_2(\hat{f}_1, \check{f}_2) + \bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2). \end{aligned}$$

Here, \bar{R}_1 , \bar{R}_2 and \bar{Q} are defined by

$$\bar{Q}(\check{f}_2, \check{f}_2)(\check{v}) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [\check{f}_2(\check{v}') \check{f}_2(\check{v}_*) - \check{f}_2(\check{v}) \check{f}_2(\check{v}_*)] \frac{C_{eff}(V_2^\circ)^\delta}{4\pi r_2^2 V_2^\circ} |\check{v} - \check{v}_*|^\delta d\sigma d\check{v}^*,$$

with

$$\begin{cases} \check{v}' &= \frac{\check{v} + \check{v}_*}{2} + \frac{|\check{v} - \check{v}_*|}{2} \sigma, \\ \check{v}_*' &= \frac{\check{v} + \check{v}_*}{2} - \frac{|\check{v} - \check{v}_*|}{2} \sigma, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\hat{v}_1, \bar{r}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left[\hat{f}_1(\hat{v}'_1, \bar{r}) \check{f}_2(\check{v}'_2) - \hat{f}_1(\hat{v}_1, \bar{r}) \check{f}_2(\check{v}_2) \right] \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{1/3} + \bar{r} \right)^2 |(\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1) \cdot \omega| d\omega d\check{v}_2, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \bar{R}_2(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\check{v}_2) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} \left[\hat{f}_1(\hat{v}'_1, \bar{r}) \check{f}_2(\check{v}'_2) - \hat{f}_1(\hat{v}_1, \bar{r}) \check{f}_2(\check{v}_2) \right] \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{1/3} + \bar{r} \right)^2 |(\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1) \cdot \omega| dr d\omega d\hat{v}_1, \end{aligned}$$

with

$$\begin{cases} \hat{v}'_1 &= \hat{v}_1 + \frac{2\sqrt{\varepsilon_m} \bar{r}^{-3}}{1 + \varepsilon_m \bar{r}^{-3}} [\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)] \omega, \\ \check{v}'_2 &= \check{v}_2 - \frac{2}{1 + \varepsilon_m \bar{r}^{-3}} [\omega \cdot (\check{v}_2 - \sqrt{\varepsilon_m} \hat{v}_1)] \omega, \end{cases}$$

and $r_0 = \frac{r_{max}}{r_{min}}$. Finally, η is an adimensional constant defined by $\eta = \frac{3m_2}{4\pi\rho r_2^3}$, where ρ is the volumic mass of particles of dust and ϱ the radius of molecules (that is, $\left(\frac{\eta}{\varepsilon_m}\right)^{1/3} = \frac{r_{min}}{\varrho}$). From now on, we also denote

$$C_{eff}^a := \frac{C_{eff}(V_2^\circ)^\delta}{4\pi r_2^2 V_2^\circ}$$

(this parameter is of order 1 under our assumptions).

We now put ourselves in a spatially homogeneous context, and we establish the adimensional versions of various estimates (mass, energy, entropy).

We first notice that the adimensional versions of the relations of conservation of mass are similar to formulas (5.9) and (5.10) : we get indeed, for a.e $\bar{t} \in \mathbb{R}^+$ and for all $\bar{r} \in [1, r_0]$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}_1(\bar{t}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}_1(0, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1, \quad (5.16)$$

(where $r_0 = \frac{r_{max}}{r_{min}}$), and

$$\int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \check{v}_2) d\check{v}_2 = \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(0, \check{v}_2) d\check{v}_2. \quad (5.17)$$

We also get

$$\begin{aligned} &\int_{r_{min}}^{r_{max}} \int_{\mathbb{R}^3} f_1(t, v_1, r) |v_1|^2 \left(\frac{r}{r_{min}} \right)^3 dr dv_1 \\ &= n_1^\circ (V_1^\circ)^2 \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}_1(\bar{t}, \hat{v}_1, \bar{r}) |\hat{v}_1|^2 \bar{r}^3 d\bar{r} d\hat{v}_1, \end{aligned}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v_2) |v_2|^2 dv_2 = n_2^\circ (V_2^\circ)^2 \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \check{v}_2) |\check{v}_2|^2 d\check{v}_2.$$

Thanks to (5.14), (5.15), one deduces from the relation of conservation of energy (5.13) the following relation :

$$\begin{aligned} & \alpha^\circ \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}_1(\bar{t}, \hat{v}_1, \bar{r}) |\hat{v}_1|^2 \bar{r}^3 d\bar{r} d\hat{v}_1 + \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \check{v}_2) |\check{v}_2|^2 d\check{v}_2 \\ &= \alpha^\circ \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}_1(0, \hat{v}_1, \bar{r}) |\hat{v}_1|^2 \bar{r}^3 d\bar{r} d\hat{v}_1 + \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(0, \check{v}_2) |\check{v}_2|^2 d\check{v}_2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Moreover, since

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{r_{min}}^{r_{max}} f_1(t, v_1, r) \ln(f_1(t, v_1, r)) dr dv_1 \\ &= n_1^\circ \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \hat{f}_1(\bar{t}, \hat{v}_1, \bar{r}) \ln(\hat{f}_1(\bar{t}, \hat{v}_1, \bar{r})) d\bar{r} d\hat{v}_1 \\ &+ n_1^\circ \left(\ln(n_1^\circ) - \ln((V_1^\circ)^3 r_{min}) \right) \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \hat{f}_1(\bar{t}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\bar{r} d\hat{v}_1, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v_2) \ln(f_2(t, v_2)) dv_2 &= n_2^\circ \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \check{v}_2) \ln(\check{f}_2(\bar{t}, \check{v}_2)) d\check{v}_2 \\ &+ n_2^\circ \left(\ln(n_2^\circ) - \ln((V_2^\circ)^3) \right) \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \check{v}_2) d\check{v}_2, \end{aligned}$$

[and thanks to relations (5.16) and (5.17)], the entropy inequality (5.11) leads to the following inequality :

$$\begin{aligned} & \alpha^\circ \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \hat{f}_1(\bar{t}, \hat{v}_1, \bar{r}) \ln(\hat{f}_1(\bar{t}, \hat{v}_1, \bar{r})) d\bar{r} d\hat{v}_1 + \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \check{v}_2) \ln(\check{f}_2(\bar{t}, \check{v}_2)) d\check{v}_2 \\ & \leq \alpha^\circ \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \hat{f}_1(0, \hat{v}_1, \bar{r}) \ln(\hat{f}_1(0, \hat{v}_1, \bar{r})) d\bar{r} d\hat{v}_1 + \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(0, \check{v}_2) \ln(\check{f}_2(0, \check{v}_2)) d\check{v}_2. \end{aligned} \quad (5.19)$$

In the experiment that we consider, the typical value of α° is 10^{-6} , that of ε_m is 10^{-12} , and that of η is $6 \cdot 10^{-2}$. Therefore, we consider, like in section 4.2.5.3 of Chapter 4, that

$$c := \frac{\alpha^\circ}{4\pi} \left(\frac{\eta}{\varepsilon_m} \right)^{2/3} \sim 1, \quad \text{and} \quad \alpha^\circ \sim \sqrt{\varepsilon_m}. \quad (5.20)$$

We set

$$p := \frac{1}{\alpha^\circ},$$

and we write $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m}} = \xi p$, with $\xi > 0$ fixed. Then we have $\left(\frac{\varepsilon_m}{\eta} \right)^{1/3} = \frac{1}{2\sqrt{\pi p c}}$.

We now write $f_1(t, v, r)$ instead of $\hat{f}_1(\bar{t}, \hat{v}_1, \bar{r})$, $f_2(t, v)$ instead of $\check{f}_2(\bar{t}, \check{v}_2)$, Q^a instead of \bar{Q} , $R_1^{a,p}$ instead of \bar{R}_1 , $R_2^{a,p}$ instead of \bar{R}_2 . We obtain the following equations (in a spatially homogeneous context) :

$$\frac{\partial f_{1,p}}{\partial t} = p c R_1^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p}), \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial f_{2,p}}{\partial t} = c R_2^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p}) + Q^a(f_{2,p}, f_{2,p}), \quad (5.22)$$

where Q^a , $R_1^{a,p}$, $R_2^{a,p}$ are defined by

$$Q^a(f_2, f_2)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_2(v') f_2(v'_*) - f_2(v) f_2(v_*)] C_{eff}^a |v - v_*|^\delta d\sigma dv_*,$$

where C_{eff}^a is an adimensional constant [and v', v'_* satisfy (5.7)],

$$\begin{aligned} R_1^{a,p}(f_1, f_2)(v_1, r) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_1(v'_{1,p}, r) f_2(v'_{2,p}) - f_1(v_1, r) f_2(v_2)] \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi p c}} + r \right)^2 \left| \left(v_2 - \frac{v_1}{\xi p} \right) \cdot \omega \right| d\omega dv_2, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} R_2^{a,p}(f_1, f_2)(v_2) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} [f_1(v'_{1,p}, r) f_2(v'_{2,p}) - f_1(v_1, r) f_2(v_2)] \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi p c}} + r \right)^2 \left| \left(v_2 - \frac{v_1}{\xi p} \right) \cdot \omega \right| dr d\omega dv_1, \end{aligned}$$

where c, ξ are adimensional constants, $r_0 = \frac{r_{max}}{r_{min}}$, and

$$\begin{cases} v'_{1,p} &= v_1 + \frac{2\xi p r^{-3}}{(\xi p)^2 + r^{-3}} \left[\omega \cdot \left(v_2 - \frac{v_1}{\xi p} \right) \right] \omega, \\ v'_{2,p} &= v_2 - \frac{2(\xi p)^2}{(\xi p)^2 + r^{-3}} \left[\omega \cdot \left(v_2 - \frac{v_1}{\xi p} \right) \right] \omega. \end{cases} \quad (5.23)$$

We rigorously show in this Chapter that in the limit $p \rightarrow \infty$, the solutions to eq. (5.21) – (5.22) given by Proposition 5.1 converge towards the solution of the following Vlasov-Boltzmann coupling :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\pi c}{r \xi} K(f_2) \cdot \nabla_v f_1 = 0, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{c}{2} m(f_{1,in}) L(f_2) + Q^a(f_2, f_2), \quad (5.25)$$

where

$$m(f_{1,in}) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,in}(v_1, r) r^2 dr dv_1,$$

$$L(f_2)(t, v) = \int_{\mathbb{S}^2} [f_2(t, v - 2(\omega \cdot v)\omega) - f_2(t, v)] |v \cdot \omega| d\omega,$$

and

$$K(f_2)(t) = \int_{\mathbb{R}^3} |v_2| v_2 f_2(t, v_2) dv_2. \quad (5.26)$$

More precisely, we shall prove the

Theorem 5.1 *Let $c > 0$, $\xi > 0$, $C_{eff}^a > 0$, $\delta \in]0, 1]$, $r_0 > 1$ be the parameters appearing in Q^a , $R_1^{a,p}$, $R_2^{a,p}$. Let also $f_{1,in} := f_{1,in}(r, v) > 0$, $f_{2,in} := f_{2,in}(v) > 0$ be initial data such that*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,in}(v, r) (1 + |v|^4 + |\ln f_{1,in}(v, r)|) dr dv &< +\infty, \\ \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) (1 + |v|^4 + |\ln f_{2,in}(v)|) dv &< +\infty. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Then, if $(f_{1,p}, f_{2,p})$ denotes a family (indexed by p) of weak solutions to eq. (5.21) – (5.22) given by Proposition 5.1 (with $f_{1,p}(0, \cdot, \cdot) = f_{1,in}$, $f_{2,p}(0, \cdot) = f_{2,in}$), one can extract a subsequence (still denoted by $(f_{1,p}, f_{2,p})$) which converges for all $T > 0$ in $L^\infty([0, T]; M^1(\mathbb{R}^3 \times [1, r_0]) \times L^1(\mathbb{R}^3))$ weak towards a weak solution*

$$(f_1, f_2) \in L^\infty([0, T]; M^1(\mathbb{R}^3 \times [1, r_0]) \times L^1(\mathbb{R}^3))$$

to eq. (5.24) – (5.26).

By a weak solution, we here mean that for all $\psi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \times [1, r_0])$, we have

$$\begin{aligned} - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_1(t, v, r) \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, v, r) dr dv dt &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,in}(v, r) \psi(0, v, r) dr dv \\ &+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \frac{\pi c}{r \xi} K(f_2)(t) \cdot \nabla_v \psi(t, v, r) f_1(t, v, r) dr dv dt, \end{aligned} \quad (5.28)$$

and for all $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$, we have

$$\begin{aligned} - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, v) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, v) dv dt &= \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) \varphi(0, v) dv \\ + c m(f_{1,in}) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} L(f_2)(t, v) \varphi(t, v) dv dt &+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} Q^a(f_2, f_2)(t, v) \varphi(t, v) dv dt. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Note that in the formulas above, we have used the notation $f(\cdot, v, r) dr dv$ instead of $df(\cdot, v, r)$. This is justified in particular by the fact that this measure has a density, as stated in the Remark at the end of this Chapter.

Our method of proof is based on uniform w.r.t. p a priori estimates including in particular moments estimates based on a new variant of Povzner's inequality, especially suited for collisions of particles with disparate masses. We refer for previous versions of this inequality (including inequalities devised for non cutoff or energy-dissipating kernels) to [Po], [Bo], [Lu], [De2], [MiW], [DeMo], [W2], [GP].

Unfortunately, the entropy estimate for $f_{1,p}$ is not uniform w.r.t. p (this uniformity holds only for $f_{2,p}$), so that the passage to the limit when $p \rightarrow \infty$ is done only in the sense of weak measures. Note that measure-valued solutions to the Boltzmann equation have been introduced in the context of steady solutions, (Cf. for example [Ce2]). Our own context is somehow more favorable, since when the initial datum is smooth enough, the equation obtained at the limit preserves in the evolution this smoothness.

The remaining sections of this Chapter are devoted to the proof that when $p \rightarrow \infty$ in (5.21), (5.22), the solutions of this system converge towards the solutions of a Boltzmann-Vlasov coupling given by eq. (5.24), (5.25) [that is, Theorem 5.1]. For the sake of readability, we only consider the case $\xi = 1$ (this changes nothing in the Proof).

5.2 Relations of conservation of mass, energy and entropy

We first express what remains of the relations of conservation of mass, energy (and of the evolution of entropy) when $p \rightarrow \infty$ in eq. (5.21), (5.22), under the assumptions of Theorem 5.1. According to relations (5.16), (5.17), (5.18), (5.19) and to assumption (5.20), the following estimates hold, for all $p \in \mathbb{N}$, for all $t \in \mathbb{R}^+$, and for a.e $r \in [1, r_0]$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_{1,p}(t, v, r) dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_{1,in}(v, r) dv, \quad (5.30)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_{2,p}(t, v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) dv, \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,p}(t, v, r) \ln(f_{1,p}(t, v, r)) dr dv + \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,p}(t, v) \ln(f_{2,p}(t, v)) dv \\ & \leq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,in}(v, r) \ln(f_{1,in}(v, r)) dr dv + \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) \ln(f_{2,in}(v)) dv, \end{aligned} \quad (5.32)$$

and

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} f_{1,p}(t, v, r) |v|^2 r^3 dr dv + \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,p}(t, v) |v|^2 dv \\ & = \frac{1}{p} \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} f_{1,in}(v, r) |v|^2 r^3 dr dv + \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,in}(v) |v|^2 dv. \end{aligned} \quad (5.33)$$

We consequently obtain the following bounds (for all $T > 0$)

$$\sup_{p \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v| + |v|^2) f_{2,p}(t, v) dv < +\infty, \quad (5.34)$$

and

$$\sup_{p \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \left(1 + |v| + \frac{|v|^2}{p} \right) f_{1,p}(t, v, r) dr dv < +\infty. \quad (5.35)$$

Estimate (5.34) is indeed a direct consequence of relations (5.30), (5.31) and (5.33). So is also the bound

$$\sup_{p \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \left(1 + \frac{|v|^2}{p} \right) f_{1,p}(t, v, r) dr dv < +\infty.$$

In order to obtain (5.35), we only have to prove the following bound :

$$\sup_{p \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} |v| f_{1,p}(t, v, r) dr dv < +\infty. \quad (5.36)$$

Let $p \in \mathbb{N}^*$ and $t \in [0, T]$. We have

$$\begin{aligned} & \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} f_{1,p}(t, v_1, r) |v_1| dr dv_1 \\ & = \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} f_{1,in}(v_1, r) |v_1| dr dv_1 + p c \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t R_1^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(s, v_1, r) |v_1| ds dr dv_1, \end{aligned}$$

with

$$\int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} f_{1,in}(v_1, r) |v_1| dr dv_1 \leq \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} f_{1,in}(v_1, r) (1 + |v_1|^2) dr dv_1 < +\infty.$$

Thanks to the involutive character of the transformation $(v_1, v_2) \rightarrow (v'_{1,p}, v'_{2,p})$, one can get :

$$\begin{aligned} & p \int_0^t \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} R_1^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(s, v_1, r) |v_1| dr dv_1 ds \\ &= p \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} f_{1,p}(s, v_1, r) f_{2,p}(s, v_2) \left| \omega \cdot \left(\frac{v_1}{p} - v_2 \right) \right| \\ & \quad \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi} p c} + r \right)^2 (|v'_{1,p}| - |v_1|) dr d\omega dv_2 dv_1 ds. \end{aligned}$$

Noticing that

$$\begin{aligned} \left| \omega \cdot \left(\frac{v_1}{p} - v_2 \right) \right| (|v'_{1,p}| - |v_1|) &\leq \left| \frac{v_1}{p} - v_2 \right| |v'_{1,p} - v_1| \\ &\leq \frac{Cst}{p} \left(1 + \frac{|v_1|^2}{p} \right) (1 + |v_2|^2), \end{aligned}$$

we get

$$\begin{aligned} & p \int_0^t \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} R_1^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(s, v_1, r) ds dr dv_1 \\ &\leq Cst \sup_{p \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \left(1 + \frac{|v_1|^2}{p} \right) f_{1,p}(t, v, r) dv dr \\ &\quad \times \sup_{p \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v_2|^2) f_{2,p}(t, v) dv, \end{aligned}$$

and estimate (5.36) (and therefore (5.34)) holds.

5.3 Boundedness of Moments of order $\gamma > 2$

We now show that higher order moments can be bounded for $f_{2,p}$ (uniformly w.r.t. p), provided that they initially exist. More precisely, we define for $\gamma \geq 1$, and $g_1 := g_1(t, v, r) \geq 0$, $g_2 := g_2(t, v) \geq 0$, the quantities

$$M_{\gamma,p}(g_1, g_2)(t) = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^\gamma) \left\{ g_2(t, v) + \frac{1}{p} \int_1^{r_0} r^{\frac{3\gamma}{2}} g_1(t, v, r) dr \right\} dv,$$

and

$$S_\gamma(g_1, g_2)(t) = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^\gamma) g_2(t, v) dv + \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} (1 + |v|^\gamma) g_1(t, v, r) dr dv.$$

Then the following Proposition holds :

Proposition 5.2 *Let $s \geq 1$. Then there exist constants $K_1, K_2, K_3 > 0$ which only depend on s, T, r_0, c, ξ and $C_{eff}^a > 0$, $\delta \in [0, 1]$ in the cross section of Q^a , $R_1^{a,p}$, $R_2^{a,p}$, such that (for all $g_1 := g_1(t, v, r) \geq 0$, $g_2 := g_2(t, v) \geq 0$ such that the integrals make sense)*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^{2s}) Q^a(g_2, g_2)(t, v) dv \\ & \leq K_1 M_{2s,p}(g_2, g_2)(t) (M_{2,p}(g_2, g_2)(t) + M_{2s-2,p}(g_2, g_2)(t)), \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^{2s}) \left\{ R_2^{a,p}(g_1, g_2)(t, v) + \int_1^{r_0} r^{3s} R_1^{a,p}(g_1, g_2)(t, v, r) dr \right\} dv \\ & \leq K_2 [M_{2s,p}(g_1, g_2)(t) S_1(g_1, g_2)(t) + p M_{2s-1,p}(g_1, g_2)(t) M_{2,p}(g_1, g_2)(t)], \end{aligned} \quad (5.38)$$

and

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^{2s}) \left\{ R_2^{a,p}(g_1, g_2)(t, v) + \int_1^{r_0} r^{3s} R_1^{a,p}(g_1, g_2)(t, v, r) dr \right\} dv \\ & \leq K_3 M_{2,p}(g_1, g_2)(t) M_{2s-1,p}(g_1, g_2)(t) + \frac{K_3}{p} S_1(g_1, g_2)(t) M_{2s,p}(g_1, g_2)(t) \\ & \quad + \frac{K_3}{p^2} M_{2s+1,p}(g_1, g_2)(t) + \frac{K_3}{p} M_{3,p}(g_1, g_2)(t) M_{2s-2,p}(g_1, g_2)(t). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Proof of Proposition 5.2. We use the classical Povzner's inequality to prove inequalities (5.37) and (5.38). More precisely, the inequality for (5.37) can be found in [De2] for example. We have, for inequality (5.38) :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^{2s}) \left(R_2^{a,p}(g_1, g_2)(t, v) + \int_1^{r_0} r^{3s} R_1^{a,p}(g_1, g_2)(t, v, r) dr \right) dv \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{S}^2} \left((r^3 |v'_{1,p}|^2 + |v'_{2,p}|^2)^s - r^{3s} |v_1|^{2s} - |v_2|^{2s} \right) \\ & \quad \times \frac{1}{2} \left| \omega \cdot \left(\frac{v_1}{p} - v_2 \right) \right| \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi pc}} + r \right)^2 g_1(t, v_1, r) g_2(t, v_2) dr d\omega dv_2 dv_1, \end{aligned}$$

and since the couple of velocities $(v'_{1,p}, v'_{2,p})$ given by (5.23) satisfies the relation

$$r^3 |v'_{1,p}|^2 + |v'_{2,p}|^2 = r^3 |v_1|^2 + |v_2|^2,$$

we get

$$\begin{aligned} & \left((r^3 |v'_{1,p}|^2 + |v'_{2,p}|^2)^s - r^{3s} |v_1|^{2s} - |v_2|^{2s} \right) \left| \omega \cdot \left(\frac{v_1}{p} - v_2 \right) \right| \\ & \leq Cst(s, r_0) \left(|v_1|^{2s-1} |v_2| + |v_1| |v_2|^{2s-1} \right) \left| \frac{v_1}{p} - v_2 \right| \\ & \leq Cst(s, r_0) \left(\frac{1}{p} |v_1|^{2s} |v_2| + |v_1| |v_2|^{2s} + \frac{1}{p} |v_1|^2 |v_2|^{2s-1} + |v_1|^{2s-1} |v_2|^2 \right), \end{aligned}$$

and estimate (5.38) holds. This estimate only depends on moments M_k with $k \leq 2s$, but is not uniform w.r.t p . So it is not possible at this level to use it to establish a uniform estimate on the moments M_s .

Therefore, we establish inequality (5.39) thanks to a new variant of Povzner's inequality. We use for that an other parametrisation of the post-collisional velocities in the operators $R_1^{a,p}$ and $R_2^{a,p}$ (Cf. [De2] again) :

$$R_1^{a,p}(g_1, g_2)(t, v_1, r) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi pc}} + r \right)^2 \left| \frac{v_1}{p} - v_2 \right| \\ \times \left[g_1(t, v_{1,p}'', r) g_2(t, v_{2,p}'') - g_1(t, v_1, r) g_2(t, v_2) \right] d\sigma dv_2,$$

and

$$R_2^{a,p}(g_1, g_2)(t, v_2) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi pc}} + r \right)^2 \left| \frac{v_1}{p} - v_2 \right| \\ \times \left[g_1(t, v_{1,p}'', r) g_2(t, v_{2,p}'') - g_1(t, v_1, r) g_2(t, v_2) \right] dr d\sigma dv_1,$$

with

$$\begin{cases} v_{1,p}'' = \frac{p^2}{1+r^3p^2} \left[\left(v_1 r^3 + \frac{v_2}{p} \right) - \frac{1}{p} \left| v_2 - \frac{v_1}{p} \right| \sigma \right], \\ v_{2,p}'' = \frac{p^2}{1+r^3p^2} \left[\frac{1}{p} \left(v_1 r^3 + \frac{v_2}{p} \right) + r^3 \left| v_2 - \frac{v_1}{p} \right| \sigma \right]. \end{cases} \quad (5.40)$$

We now establish the new variant of Povzner's inequality. We define, for $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\sigma \in \mathbb{S}^2$, $r \in [1, r_0]$ and $s \geq 1$, the quantity

$$\psi_{v_1, v_2}^s(\sigma, r) = r^{3s} \left| v_{1,p}'' \right|^{2s} + \left| v_{2,p}'' \right|^{2s} - r^{3s} |v_1|^{2s} - |v_2|^{2s},$$

where $v_{1,p}''$ and $v_{2,p}''$ are given by (5.40), and we begin by introducing the vector $\sigma_0 \in \mathbb{S}^2$ defined as :

$$\sigma_0 = - \frac{v_2 - \frac{v_1}{p}}{\left| v_2 - \frac{v_1}{p} \right|}.$$

Noticing that $r^3 - \frac{1}{p^2} \geq 0$ for all $p \in \mathbb{N}^*$, $r \in [1, r_0]$, we get

$$\begin{aligned} & \psi_{v_1, v_2}^s(\sigma_0, r) \\ &= \left(\frac{p^2}{1+r^3p^2} \right)^{2s} \left[r^{3s} \left| \left(r^3 - \frac{1}{p^2} \right) v_1 + \frac{2}{p} v_2 \right|^{2s} + \left| \frac{2r^3}{p} v_1 - \left(r^3 - \frac{1}{p^2} \right) v_2 \right|^{2s} \right] - r^{3s} |v_1|^{2s} - |v_2|^{2s} \\ &\leq \left(\frac{p^2}{1+r^3p^2} \right)^{2s} \left\{ r^{3s} \left[\left(r^3 - \frac{1}{p^2} \right) |v_1| + \frac{2}{p} |v_2| \right]^{2s} + \left[\frac{2r^3}{p} |v_1| + \left(r^3 - \frac{1}{p^2} \right) |v_2| \right]^{2s} \right\} \\ &\quad - r^{3s} |v_1|^{2s} - |v_2|^{2s} \\ &\leq (a_s(p) - 1) \left(r^{3s} |v_1|^{2s} + |v_2|^{2s} \right) + F(v_1, v_2), \end{aligned}$$

with

$$a_s(p) = \left(\frac{p^2}{1+r^3p^2} \right)^{2s} \left\{ \left(r^3 - \frac{1}{p^2} \right)^{2s} + r^{3s} \left(\frac{2}{p} \right)^{2s} \right\},$$

and

$$\begin{aligned}
& F(v_1, v_2) \\
& \leq Cst(s) \left(\frac{p^2}{1 + r^3 p^2} \right)^{2s} \\
& \quad \times \left\{ |v_1|^{2s-1} |v_2| \left[r^{3s} \left(r^3 - \frac{1}{p^2} \right)^{2s-1} \frac{2}{p} + \left(\frac{2r^3}{p} \right)^{2s-1} \left(r^3 - \frac{1}{p^2} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + |v_1| |v_2|^{2s-1} \left[r^{3s} \left(r^3 - \frac{1}{p^2} \right) \left(\frac{2}{p} \right)^{2s-1} + \left(\frac{2r^3}{p} \right) \left(r^3 - \frac{1}{p^2} \right)^{2s-1} \right] \right\} \\
& \leq G_{s,p,r} \left(|v_1|^{2s-1} |v_2| + |v_1| |v_2|^{2s-1} \right),
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
G_{s,p,r} &= Cst(s) \left(\frac{p^2}{1 + r^3 p^2} \right)^{2s} r^{3(2s-1)} \left[\left(r^3 - \frac{1}{p^2} \right)^{2s-1} \frac{2}{p} + \left(\frac{2}{p} \right)^{2s-1} \left(r^3 - \frac{1}{p^2} \right) \right] \\
&\leq \frac{Cst(s, r_0)}{p}.
\end{aligned}$$

Moreover,

$$a_s(p) \leq \left[\frac{(r^3 p^2 - 1)^2 + 4r^3 p^2}{(1 + r^3 p^2)^2} \right]^s = 1,$$

consequently we have

$$\psi_{v_1, v_2}^s(\sigma_0, r) \leq \frac{Cst(s, r_0)}{p} \left[|v_1|^{2s-1} |v_2| + |v_1| |v_2|^{2s-1} \right]. \quad (5.41)$$

We then study the quantity $\psi_{v_1, v_2}^s(\sigma, r) - \psi_{v_1, v_2}^s(\sigma_0, r)$ for any $\sigma \in \mathbb{S}^2$. We denote here $v_{1,p,\sigma}''$ and $v_{2,p,\sigma}''$ the post-collisional velocities given by (5.40) corresponding to this vector σ , and v_{1,p,σ_0}'' and v_{2,p,σ_0}'' the post-collisional velocities given by (5.40) for $\sigma = \sigma_0$. We can write

$$\psi_{v_1, v_2}^s(\sigma, r) - \psi_{v_1, v_2}^s(\sigma_0, r) = r^{3s} \left(|v_{1,p,\sigma}''|^{2s} - |v_{1,p,\sigma_0}''|^{2s} \right) + |v_{2,p,\sigma}''|^{2s} - |v_{2,p,\sigma_0}''|^{2s},$$

with

$$\begin{aligned}
& |v_{1,p,\sigma}''|^{2s} - |v_{1,p,\sigma_0}''|^{2s} \\
& \leq \left(\frac{p^2}{1 + r^3 p^2} \right)^{2s} \left\{ \left[|v_1| \left(r^3 + \frac{1}{p^2} \right) + \frac{2}{p} |v_2| \right]^{2s} - \left| \left(r^3 - \frac{1}{p^2} \right) |v_1| - \frac{2}{p} |v_2| \right|^{2s} \right\},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& |v_{2,p,\sigma}''|^{2s} - |v_{2,p,\sigma_0}''|^{2s} \\
& \leq \left(\frac{p^2}{1 + r^3 p^2} \right)^{2s} \left\{ \left[\frac{2r^3}{p} |v_1| + \left(\frac{1}{p^2} + r^3 \right) |v_2| \right]^{2s} - \left| \frac{2r^3}{p} |v_1| - \left(r^3 - \frac{1}{p^2} \right) |v_2| \right|^{2s} \right\}.
\end{aligned}$$

Using the inequality

$$(a+b)^{2s} - (a-b)^{2s} = s \int_{(a-b)^2}^{(a+b)^2} x^{s-1} dx \leq 4s (a+b)^{2s-2} ab,$$

with $a, b > 0$ and $s > 1$, and the inequality

$$(a+b)^x \leq 2^x (a^x + b^x),$$

with $x > 0$, we obtain :

$$\begin{aligned} & |v''_{1,p,\sigma}|^{2s} - |v''_{1,p,\sigma_0}|^{2s} \\ & \leq \left(\frac{p^2}{1+r^3p^2} \right)^{2s} \frac{4sr^3}{p} \left[|v_1| \left(r^3 + \frac{1}{p^2} \right) + \frac{2}{p} |v_2| \right]^{2s-2} |v_1| \left[\frac{1}{p} |v_1| + 2 |v_2| \right] \\ & \leq \left(\frac{p^2}{1+r^3p^2} \right)^{2s} \frac{Cst(s, r_0)}{p} \left[|v_1|^{2s-2} \left(r^3 + \frac{1}{p^2} \right)^{2s-2} + \left(\frac{2}{p} \right)^{2s-2} |v_2|^{2s-2} \right] \\ & \quad \times |v_1| \left[\frac{1}{p} |v_1| + 2 |v_2| \right], \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & |v''_{2,p,\sigma}|^{2s} - |v''_{2,p,\sigma_0}|^{2s} \\ & \leq \left(\frac{p^2}{1+r^3p^2} \right)^{2s} \frac{4sr^3}{p} \left[\frac{2r^3}{p} |v_1| + \left(\frac{1}{p^2} + r^3 \right) |v_2| \right]^{2s-2} \left[2r^3 |v_1| + \frac{1}{p} |v_2| \right] |v_2| \\ & \leq \left(\frac{p^2}{1+r^3p^2} \right)^{2s} \frac{Cst(s, r_0)}{p} \left[\left(\frac{2r^3}{p} \right)^{2s-2} |v_1|^{2s-2} + \left(\frac{1}{p^2} + r^3 \right)^{2s-2} |v_2|^{2s-2} \right] \\ & \quad \times \left[2r^3 |v_1| + \frac{1}{p} |v_2| \right] |v_2|. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} & r^{3s} \left(|v''_{1,p,\sigma}|^{2s} - |v''_{1,p,\sigma_0}|^{2s} \right) + |v''_{2,p,\sigma}|^{2s} - |v''_{2,p,\sigma_0}|^{2s} \\ & \leq b_s(p) \left[r^{3s} |v_1|^{2s} + |v_2|^{2s} \right] + H(v_1, v_2), \end{aligned} \tag{5.42}$$

where

$$b_s(p) = \frac{Cst(s, r_0)}{p^2} \left(\frac{p^2}{1+r^3p^2} \right)^2,$$

and

$$\begin{aligned} H(v_1, v_2) = & \left(\frac{p^2}{1+r^3p^2} \right)^2 \left\{ \frac{Cst(s, r_0)}{p} \left(|v_2| |v_1|^{2s-1} + |v_1| |v_2|^{2s-1} \right) \right. \\ & \left. + \frac{Cst(s, r_0)}{p^2} \left(\frac{2}{p} \right)^{2s-2} \left[|v_1|^2 |v_2|^{2s-2} + |v_2|^2 |v_1|^{2s-2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Finally we estimate $\psi_{v_1, v_2}^s(\sigma, r) \left| \frac{v_1}{p} - v_2 \right|$. Thanks to (5.41) and (5.42), we obtain, for $s \geq 1$ and using the bound $1 \leq r \leq r_0$,

$$\begin{aligned} \psi_{v_1, v_2}^s(\sigma, r) &\leq \frac{Cst(s, r_0)}{p^2} (|v_1|^{2s} + |v_2|^{2s}) + \frac{Cst(s, r_0)}{p} \left[|v_1|^{2s-1} |v_2| + |v_2|^{2s-1} |v_1| \right] \\ &\quad + \frac{Cst(s, r_0)}{p^2} \left[|v_1|^{2s-2} |v_2|^2 + |v_2|^{2s-2} |v_1|^2 \right]. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} &\psi_{v_1, v_2}^s(\sigma, r) \left| \frac{v_1}{p} - v_2 \right| \\ &\leq \frac{Cst(s, r_0)}{p^2} \left[\frac{1}{p} |v_1|^{2s+1} + |v_2|^{2s+1} \right] + \frac{Cst(s, r_0)}{p} \left[\frac{1}{p} |v_1|^{2s} |v_2| + |v_1| |v_2|^{2s} \right] \\ &\quad + \frac{Cst(s, r_0)}{p} \left[\frac{1}{p} |v_1|^2 |v_2|^{2s-1} + |v_2|^2 |v_1|^{2s-1} \right] \\ &\quad + \frac{Cst(s, r_0)}{p^2} \left[\frac{1}{p} |v_1|^3 |v_2|^{2s-2} + |v_2|^3 |v_1|^{2s-2} \right], \end{aligned}$$

and we finally obtain (5.39). This ends the Proof of Proposition 3.1. \diamond

Thanks to Proposition 5.2, we can prove the following (uniform w.r.t. p) bounds for the solutions of eq. (5.21), (5.22) :

Proposition 5.3 *Under the assumptions of Theorem 5.1, the moment of order 3 of $f_{2,p}$ is uniformly bounded (w.r.t. p) for all $T > 0$, more precisely :*

$$\sup_{t \in [0, T], p \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \left(\frac{1}{p} f_{1,p}(t, v, r) + f_{2,p}(t, v) \right) (1 + |v|^3) dr dv < +\infty. \quad (5.43)$$

Proof of Proposition 5.3. Thanks to (5.34), (5.35), we know that (for all $T > 0$)

$$S := \sup_{t \in [0, T]} \sup_{p \in \mathbb{N}^*} S_1(f_{1,p}, f_{2,p}) < +\infty, \quad (5.44)$$

and

$$M_2 := \sup_{t \in [0, T]} \sup_{p \in \mathbb{N}^*} M_{2,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t) < +\infty. \quad (5.45)$$

The Proof will be divided in several steps. We first notice thanks to (5.37) and (5.38) used with $s = 3/2$ that (for all $T > 0$)

$$\sup_{p \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in [0, T]} \frac{1}{p} M_{3,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t) < +\infty. \quad (5.46)$$

Using the same inequalities, but with $s = 2$, we then obtain :

$$\sup_{p \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in [0, T]} \frac{1}{p^2} M_{4,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t) < +\infty. \quad (5.47)$$

This allows us to prove, thanks to inequality (5.39) used with $s = 3/2$ that :

$$\sup_{p \in \mathbb{N}^*} \sup_{t \in [0, T]} M_{3,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t) < +\infty. \quad (5.48)$$

Let us now give a few more details about the successive bounds :

Bound on $\frac{1}{p}M_{3,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t)$: Since $f_{1,p}$ and $f_{2,p}$ are solutions of the equations (5.21) and (5.22), we have, for all $s \geq 1$:

$$\begin{aligned} & M_{2s,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t) \\ &= M_{2s,p}(f_{1,in}, f_{2,in}) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v_2|^{2s}) Q^a(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau, v_2) dv_2 d\tau \\ &+ c \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v_2|^{2s}) R_2^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau, v_2) dv_2 d\tau \\ &+ c \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} r^{3s} (1 + |v_1|^{2s}) R_1^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau, v_1, r) dr dv_1 d\tau. \end{aligned}$$

Thanks to (5.37) and (5.38), we obtain the following bound when $s \in [1, 2]$ (with the notations (5.44) and (5.45))

$$\begin{aligned} M_{2s,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t) &\leq M_{2s,p}(f_{1,in}, f_{2,in}) + p c K_2 M_2 \int_0^t M_{2s-1,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau) d\tau \\ &+ (K_1 M_2 + c K_2 S) \int_0^t M_{2s,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Taking $s = \frac{3}{2}$ in (5.49), we obtain

$$\begin{aligned} M_{3,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t) &\leq M_{3,p}(f_{1,in}, f_{2,in}) + p c K_2 M_2^2 T \\ &+ (K_1 M_2 + c K_2 S) \int_0^t M_{3,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Then, thanks to Gronwall's Lemma, we can deduce that for all $t \in [0, T]$:

$$\frac{1}{p} M_{3,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t) \leq \left[c K_2 M_2^2 T + M_{3,1}(f_{1,in}, f_{2,in}) \right] \exp[(K_1 M_2 + c K_2 S) t], \quad (5.50)$$

so that relation (5.46) holds.

Bound on $\frac{1}{p^2}M_{4,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t)$: Using now inequality (5.49) with $s = 2$, we see that for some constant $K_4 > 0$, for all $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} & M_{4,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t) - M_{4,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(0) \\ &\leq K_4 \left\{ \int_0^t M_{4,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau) d\tau + p \int_0^t M_{3,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Using (5.50) and Gronwall's Lemma, we see that estimate (5.47) holds.

Bound on $M_{3,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t)$. We here use the bound (5.39), and obtain, for all $s \in [1, 2]$, the following estimate :

$$\begin{aligned}
& M_{2s,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t) \\
& \leq M_{2s,p}(f_{1,in}, f_{2,in}) + c \frac{K_3}{p^2} \int_0^t M_{2s+1,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau) d\tau \\
& \quad + \left(c \frac{K_3}{p} S + M_2 K_1 \right) \int_0^t M_{2s,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau) d\tau \\
& \quad + c K_3 M_2 \int_0^t M_{2s-1,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau) d\tau \\
& \quad + c \frac{K_3}{p} \int_0^t M_{3,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau) M_{2s-2,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau) d\tau. \tag{5.51}
\end{aligned}$$

Taking $s = \frac{3}{2}$ in the previous estimate, we get :

$$\begin{aligned}
M_{3,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(t) & \leq M_{3,p}(f_{1,in}, f_{2,in}) + c \frac{K_3}{p^2} \int_0^t M_{4,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau) d\tau \\
& \quad + \left(c \frac{K_3}{p} S + M_2 K_1 \right) \int_0^t M_{3,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau) d\tau + c K_3 M_2^2 T \\
& \quad + c \frac{K_3}{p} S \int_0^t M_{3,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau) d\tau,
\end{aligned}$$

so that thanks to (5.47) and Gronwall's Lemma, we get estimate (5.48) (and (5.43)). \diamond

5.4 Weak convergence of equations (5.21) – (5.22)

We now are in a position to pass to the limit in (the weak form of) eq. (5.21), (5.22). We first notice that thanks to estimates (5.32), (5.34) and (5.35), the sequences $(f_{1,p}, f_{2,p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge up to extraction to measure-valued functions (f_1, f_2) in $L^\infty(\mathbb{R}^+; M^1(\mathbb{R}^3 \times [1, r_0]) \times L^1(\mathbb{R}^3))$ weak* and the following estimate holds :

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} (1 + |v|) f_1(t, v, r) dv dr < \infty, \tag{5.52}$$

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |v|^2) f_2(t, v) dv < \infty. \tag{5.53}$$

In the sequel, we keep the notation $f_1(t, v, r)$ for the measure-valued function $f_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow M^1(\mathbb{R}^3 \times [1, r_0])$ as in (5.52), though this measure might a priori not have a density w.r.t. Lebesgue's measure.

Moreover, thanks to assumption (5.27), and bound (5.43), moments of order lower or equal to 3 of $f_{2,p}$ are bounded w.r.t p .

In order to conclude the Proof of Theorem 5.1, it remains to show that (f_1, f_2) is a weak solution to eq. (5.24), (5.25). We study for that the convergence of the weak form of kernels $R_1^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p})$, $R_2^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p})$ and $Q^a(f_{2,p}, f_{2,p})$, when $p \rightarrow \infty$, in the following Proposition.

Proposition 5.4 *Under the assumptions of Theorem 5.1, we can extract from $(f_{1,p}, f_{2,p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ a subsequence such that (for all $T > 0$) :*

1. for all $\psi \in C_c^2([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times [1, r_0])$,

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} p R_1^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p}) \psi \, dr dv dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \frac{\pi}{r \xi} K(f_2) \cdot \nabla_v \psi f_1 \, dr dv dt, \end{aligned} \quad (5.54)$$

2. for all $\phi \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3)$,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} R_2^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p}) \phi \, dv dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} m(f_{1,in}) L(f_2) \phi \, dv dt,$$

3. for all $\phi \in C_c([0, T] \times \mathbb{R}^3)$,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} Q^a(f_{2,p}, f_{2,p}) \phi \, dv dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} Q^a(f_2, f_2) \phi \, dv dt.$$

Proof of Proposition 5.4. 1. Let $\psi \in C_c^2([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times [1, r_0])$. Denoting

$$I_{1,p} := p \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \psi(s, v, r) R_1^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(s, v, r) \, dr dv ds,$$

and

$$I_1 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \frac{\pi}{r \xi} K(f_2)(r, s) \cdot \nabla_v \psi(s, v, r) f_1(s, v, r) \, dr dv ds,$$

where $K(f_2)$ is given by (5.26), we prove that

$$\lim_{p \rightarrow \infty} I_{1,p} = I_1.$$

Thanks to the involutive character of the transformation $(v_1, v_2) \rightarrow (v'_{1,p}, v'_{2,p})$, $I_{1,p}$ can be written under the form :

$$\begin{aligned} I_{1,p} &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi p c}} + r \right)^2 f_{1,p}(s, v_1, r) f_{2,p}(s, v_2) \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left| \omega \cdot \left(\frac{v_1}{p} - v_2 \right) \right| p \left(\psi(s, v'_{1,p}, r) - \psi(s, v_1, r) \right) \, dr d\omega dv_2 dv_1 ds, \end{aligned}$$

with

$$v'_{1,p} = v_1 + \frac{2pr^{-3}}{p^2 + r^{-3}} \left[\omega \cdot \left(v_2 - \frac{v_1}{p} \right) \right] \omega,$$

and thanks to the relation

$$\int_{\mathbb{S}^2} (a \cdot \omega) (b \cdot \omega) |a \cdot \omega| \, d\omega = \pi |a| (a \cdot b),$$

for $a \in \mathbb{R}^3$ and $b \in \mathbb{R}^3$, I_1 can be written under the form :

$$I_1 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} r^2 |v_2 \cdot \omega| (v_2 \cdot \omega) f_2(s, v_2) (\omega \cdot \nabla_{v_1} \psi(s, v_1, r)) \\ \times \frac{1}{r^3} f_1(v_1, r, s) dr d\omega dv_1 dv_2 ds.$$

We now write the difference $I_{1,p} - I_1$ as the following sum :

$$I_{1,p} - I_1 = J_{1,p}^1 + J_{1,p}^2 + J_{1,p}^3 + J_{1,p}^4 + J_{1,p}^5,$$

where

$$J_{1,p}^1 = p \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi p c}} + r \right)^2 - r^2 \right] f_{1,p}(s, v_1, r) f_{2,p}(s, v_2) \\ \times \frac{1}{2} \left| \omega \cdot \left(\frac{v_1}{p} - v_2 \right) \right| \left[\psi(s, v'_{1,p}, r) - \psi(s, v_1, r) \right] dr d\omega dv_2 dv_1 ds,$$

$$J_{1,p}^2 = p \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} \left[\left| \omega \cdot \left(\frac{v_1}{p} - v_2 \right) \right| - |\omega \cdot v_2| \right] f_{2,p}(s, v_2) \\ \times \frac{1}{2} r^2 f_{1,p}(s, v_1, r) \left[\psi(s, v'_{1,p}, r) - \psi(s, v_1, r) \right] dr d\omega dv_2 dv_1 ds,$$

$$J_{1,p}^3 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} r^2 f_{1,p}(s, v_1, r) f_{2,p}(s, v_2) |\omega \cdot v_2| \\ \times \frac{1}{2} \left[p \left(\psi(s, v'_{1,p}, r) - \psi(s, v_1, r) \right) - \frac{2}{r^3} \omega \cdot \nabla_{v_1} \psi(s, v_1, r) (v_2 \cdot \omega) \right] dr d\omega dv_1 dv_2 ds,$$

$$J_{1,p}^4 = \int_0^T \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \frac{1}{r} \omega \cdot \nabla_{v_1} \psi(s, v_1, r) f_1(s, v_1, r) dr dv_1 \\ \times \int_{\mathbb{R}^3} (f_{2,p}(s, v_2) - f_2(s, v_2)) (v_2 \cdot \omega) |\omega \cdot v_2| dv_2 d\omega ds,$$

$$J_{1,p}^5 = \int_0^T \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \frac{1}{r} \omega \cdot \nabla_{v_1} \psi(s, v_1, r) (f_{1,p}(s, v_1, r) - f_1(s, v_1, r)) dr dv_1 \\ \times \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,p}(s, v_2) |\omega \cdot v_2| (v_2 \cdot \omega) dv_2 d\omega ds.$$

Noticing that

$$p \left(\psi(s, v'_{1,p}, r) - \psi(s, v_1, r) \right) \leq p \|\nabla \psi\|_{\infty} |v'_{1,p} - v_1| \\ \leq 2 \|\nabla \psi\|_{\infty} \left| v_2 - \frac{v_1}{p} \right|,$$

and thanks to bounds (5.34) and (5.35), it is easy to prove that

$$\lim_{p \rightarrow \infty} J_{1,p}^1 = \lim_{p \rightarrow \infty} J_{1,p}^2 = 0.$$

Moreover,

$$\begin{aligned} & \psi(s, v'_{1,p}, r) - \psi(s, v_1, r) \\ &= (v'_{1,p} - v_1) \cdot \nabla_{v_1} \psi(s, v_1, r) + T(v_1, v_2, r, s, p) \\ &= \frac{2pr^{-3}}{p^2 + r^{-3}} \left[\omega \cdot \left(v_2 - \frac{v_1}{p} \right) \right] (\omega \cdot \nabla_{v_1} \psi(s, v_1, r)) + T(v_1, v_2, r, s, p), \end{aligned}$$

with, since $\psi \in C_c^2([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times [1, r_0])$,

$$\begin{aligned} |T(v_1, v_2, r, s, p)| &\leq \frac{\|D_v^2 \psi\|_\infty}{2} |v'_{1,p} - v_1|^2 \\ &\leq \frac{Cst \|D_v^2 \psi\|_\infty}{p^2} \left| v_2 - \frac{v_1}{p} \right|^2. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} & \left[p \left(\psi(s, v'_{1,p}, r) - \psi(s, v_1, r) \right) - \frac{2}{r^3} (\omega \cdot \nabla_{v_1} \psi(s, v_1, r)) (v_2 \cdot \omega) \right] |\omega \cdot v_2| \\ &\leq \frac{Cst(r_0) \|D_v \psi\|_\infty}{r^3} \left(\frac{1}{p^2} |v_2|^2 + \frac{|v_1|}{p} |v_2| \right) \\ &\quad + \frac{Cst(r_0) \|D_v^2 \psi\|_\infty}{p} \left(|v_2|^3 + \frac{|v_2||v_1|^2}{p^2} + 2 \frac{|v_1||v_2|^2}{p} \right), \end{aligned}$$

and thanks to bounds (5.34), (5.35), and (5.43), we see that $\lim_{p \rightarrow \infty} J_{3,p} = 0$. Moreover, one can write

$$J_{1,p}^4 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} h(s, v_2) (f_{2,p}(s, v_2) - f_2(s, v_2)) (1 + |v_2|^2) dv_2 ds$$

with $h \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)$; so that thanks to the weak convergence of $(f_{2,p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ and to the bound (5.43), we get $\lim_{p \rightarrow \infty} J_{1,p}^4 = 0$. It remains to prove that $\lim_{p \rightarrow \infty} J_{1,p}^5 = 0$. We write for that

$$J_{1,p}^5 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \frac{1}{r} \nabla_{v_1} \psi(s, v_1, r) \cdot k_p(s) (f_{1,p}(s, v_1, r) - f_1(s, v_1, r)) dr dv_1 ds,$$

where

$$k_p(s) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \omega f_{2,p}(s, v_2) |\omega \cdot v_2| (v_2 \cdot \omega) d\omega dv_2.$$

Thanks to estimate (5.34), the sequence $(k_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ is bounded in $L^\infty([0, T])$. Moreover, for all $h > 0$ and $t \in [0, T]$ such that $t + h \leq T$, the following estimate holds for all $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t |k_p(s+h) - k_p(s)| ds \\
& \leq Cst \int_0^t \left| \int_s^{s+h} \int_{\mathbb{R}^3} [c R_{2,p}^a(f_{1,p}, f_{2,p})(\tau, v_2) + Q^a(f_{2,p}, f_{2,p})(\tau, v_2)] \right. \\
& \quad \left. \times \int_{\mathbb{S}^2} \omega |\omega \cdot v_2| (v_2 \cdot \omega) d\omega dv_2 d\tau \right| ds \\
& \leq ht Cst \sup_{\tau \in [0, T], p \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,p}(\tau, v_2) (|v_2|^3 + 1) dv_2 \\
& \quad \times \left[\sup_{\tau \in [0, T], p \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^3} f_{1,p}(\tau, v_1, r) \left(1 + \frac{|v_1|}{p} + \frac{|v_1|^2}{p^2} + \frac{|v_1|^3}{p^3} \right) dr dv_1 \right. \\
& \quad \left. + \sup_{\tau \in [0, T], p \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,p}(\tau, v_2) (|v_2|^3 + 1) dv_2 \right].
\end{aligned}$$

Using estimate (5.43), we deduce then from Riesz-Fréchet-Kolmogorov's Theorem that $\{k_p, p \in \mathbb{N}^*\}$ strongly converges (up to a subsequence) in $L^1([0, T])$. But

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \frac{1}{r} \nabla_{v_1} \psi(s, v_1, r) (f_{1,p}(s, v_1, r) - f_1(s, v_1, r)) dr dv_1$$

tends to 0 in $L^\infty([0, T])$ weak*. This allows us to conclude that $\lim_{p \rightarrow \infty} J_{1,p}^5 = 0$.

2. Let $\varphi \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3)$. We can write

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^T \varphi(s, v) R_2^{a,p}(f_{1,p}, f_{2,p})(s, v) dv ds = I_{2,p}^+ - I_{2,p}^-,$$

where we denote

$$\begin{aligned}
I_{2,p}^+ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} \varphi(s, v'_{2,p}) f_{1,p}(s, v_1, r) f_{2,p}(s, v_2) \\
& \quad \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi p c}} + r \right)^2 \left| \omega \cdot \left(\frac{v_1}{p} - v_2 \right) \right| dr d\omega dv_1 dv_2 ds,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
I_{2,p}^- &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} \varphi(s, v_2) f_{1,p}(s, v_1, r) f_{2,p}(s, v_2) \\
& \quad \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi p c}} + r \right)^2 \left| \omega \cdot \left(\frac{v_1}{p} - v_2 \right) \right| dr d\omega dv_1 dv_2 ds.
\end{aligned}$$

Denoting

$$\begin{aligned}
I_2^+ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} r^2 f_{1,in}(v, r) dv dr \right) \\
& \quad \times \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(s, v_2 - 2(\omega \cdot v_2)\omega) f_2(s, v_2) |\omega \cdot v_2| d\omega dv_2 ds,
\end{aligned}$$

and

$$I_2^- = \frac{1}{2} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} r^2 f_{1,in}(v, r) dv dr \right) \\ \times \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(s, v_2) f_2(s, v_2) |\omega \cdot v_2| d\omega dv_2 ds,$$

we prove that $\lim_{p \rightarrow \infty} I_{2,p}^+ = I_2^+$ (the proof can then be easily adapted to show that $\lim_{p \rightarrow \infty} I_{2,p}^- = I_2^-$).

Thanks to relation (5.30), we notice that for all $t \in [0, T]$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,p}(t, v, r) r^2 dr dv = \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,in}(v, r) r^2 dr dv,$$

and we write the difference $I_{2,p}^+ - I_2^+$ as the following sum :

$$I_{2,p}^+ - I_2^+ = J_{2,p}^1 + J_{2,p}^2 + J_{2,p}^3 + J_{2,p}^4,$$

where

$$J_{2,p}^1 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,in}(v_1, r) r^2 dr dv_1 \\ \times \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} |\omega \cdot v_2| \varphi(s, v_2 - 2(\omega \cdot v_2)\omega) [f_{2,p}(s, v_2) - f_2(s, v_2)] d\omega dv_2 ds,$$

$$J_{2,p}^2 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} \varphi(s, v'_{2,p}) f_{1,p}(s, v_1, r) f_{2,p}(s, v_2) \\ \times \left(\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi pc}} + r \right)^2 - r^2 \right) |\omega \cdot v_2| dr d\omega dv_1 dv_2 ds,$$

$$J_{2,p}^3 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \int_1^{r_0} \varphi(s, v'_{2,p}) f_{1,p}(s, v_1, r) f_{2,p}(s, v_2) \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi pc}} + r \right)^2 \\ \times \left(\left| \omega \cdot \left(\frac{v_1}{p} - v_2 \right) \right| - |\omega \cdot v_2| \right) dr d\omega dv_1 dv_2 ds,$$

$$J_{2,p}^4 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left(\varphi(s, v'_{2,p}) - \varphi(s, v_2 - 2(\omega \cdot v_2)\omega) \right) \\ \times r^2 |\omega \cdot v_2| f_{2,p}(s, v_2) f_{1,p}(s, v_1, r) dr dv_1 d\omega dv_2 ds.$$

Firstly we have :

$$J_{2,p}^1 = \frac{1}{2} \int_1^{r_0} \int_{\mathbb{R}^3} f_{1,in}(v_1, r) dv_1 r^2 dr \\ \times \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} b(s, v_2) [f_{2,p}(s, v_2) - f_2(s, v_2)] (1 + |v_2|) dv_2 ds,$$

with

$$b(s, v_2) = \frac{1}{(1 + |v_2|)} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(s, v_2 - 2(\omega \cdot v_2)\omega) |\omega \cdot v_2| d\omega,$$

and since $b \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)$, the convergence of $(f_{2,p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ in $L^\infty([0, T]; L^1(\mathbb{R}^3, (1 + |v|) dv))$ weak* implies that $\lim_{p \rightarrow \infty} J_{2,p}^1 = 0$.

Then, we can observe that

$$|J_{2,p}^2| \leq \frac{Cst}{\sqrt{p}} \|\varphi\|_\infty T \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,in}(v_1, r) dr dv_1 \sup_{\tau \in [0, T], p \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,p}(\tau, v_2) |v_2| dv_2,$$

and

$$\begin{aligned} |J_{2,p}^3| &\leq \frac{Cst}{p} \|\varphi\|_\infty T \sup_{\tau \in [0, T], p \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,p}(\tau, v_1, r) |v_1| dr dv_1 \\ &\quad \times \sup_{\tau \in [0, T], p \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,p}(\tau, v_2) dv_2, \end{aligned}$$

so that $\lim_{p \rightarrow \infty} J_{2,p}^2 = 0$ and $\lim_{p \rightarrow \infty} J_{2,p}^3 = 0$.

Finally, we have the following estimate :

$$\begin{aligned} |J_{2,p}^4| &\leq \frac{r_0^2}{2} \|\nabla \varphi\|_\infty \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} f_{1,p}(s, v_1, r) f_{2,p}(s, v_2) |v_2| \\ &\quad \times \int_{\mathbb{S}^2} |v'_{2,p} - (v_2 - 2(\omega \cdot v_2)\omega)| d\omega dr dv_2 dv_1 ds, \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} |v'_{2,p} - (v_2 - 2(\omega \cdot v_2)\omega)| &= \left| -\frac{2p^2}{p^2 + r^{-3}} \left[\omega \cdot \left(v_2 - \frac{v_1}{p} \right) \right] \omega + 2(\omega \cdot v_2)\omega \right| \\ &\leq \frac{Cst}{p} (1 + |v_1|) (1 + |v_2|). \end{aligned}$$

We conclude that $\lim_{p \rightarrow \infty} J_{2,p}^4 = 0$.

3. Let $\varphi \in C_c([0, T] \times \mathbb{R}^3)$. Let us write :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(s, v_2) [Q^a(f_{2,p}, f_{2,p})(s, v) - Q^a(f_2, f_2)(s, v)] dv ds = A_{1,p} - A_{2,p},$$

where we denote

$$\begin{aligned} A_{1,p} &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_{2,p}(s, v) f_{2,p}(s, v_*) - f_2(s, v) f_2(s, v_*)] \\ &\quad \times \varphi(s, v') C_{eff}^a |v - v_*|^\delta d\sigma dv_* dv ds, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} A_{2,p} &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_{2,p}(s, v) f_{2,p}(s, v_*) - f_2(s, v) f_2(s, v_*)] \\ &\quad \times \varphi(s, v) C_{eff}^a |v - v_*|^\delta d\sigma dv_* dv ds. \end{aligned}$$

We prove here that $\lim_{p \rightarrow \infty} A_{1,p} = 0$ (the proof can easily be adapted to show that $\lim_{p \rightarrow \infty} A_{2,p} = 0$). We write $A_{1,p}$ as the following sum :

$$A_{1,p} = J_{3,p}^1 + J_{3,p}^2,$$

where

$$J_{3,p}^1 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} f_2(s, v) [f_{2,p}(s, v_*) - f_2(s, v_*)] \varphi(s, v') C_{eff}^a |v - v_*|^\delta d\sigma dv_* dv ds,$$

and

$$J_{3,p}^2 = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \kappa_p(s, v) [f_{2,p}(s, v) - f_2(s, v)] dv ds,$$

with

$$\kappa_p(s, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(s, v') C_{eff}^a |v - v_*|^\delta f_{2,p}(s, v_*) d\sigma dv_*.$$

Since $(f_{2,p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ converges to f_2 in $L^\infty([0, T]; L^1(\mathbb{R}^3, (1 + |v|) dv))$ weak*, it follows that $\lim_{p \rightarrow \infty} J_{3,p}^1 = 0$.

Then, using the weak formulations of Q^a and $R_2^{a,p}$, we observe that

$$\begin{aligned} |\partial_s \kappa_p(s, v)| &\leq Cst \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_1^{r_0} \left(|v|^\delta + |v_2|^\delta + \left| \frac{v_1}{p} \right|^\delta \right) \left(|v_2| + \left| \frac{v_1}{p} \right| \right) \\ &\quad \times f_{1,p}(s, v_1, r) f_{2,p}(s, v_2) dr dv_2 dv_1 \\ &+ Cst \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(|v|^\delta + |v_2|^\delta + |w|^\delta \right) \left(|v_2|^\delta + |w|^\delta \right) \\ &\quad \times f_{2,p}(s, w) f_{2,p}(s, v_2) dv_2 dw \\ &+ Cst \|\partial_s \varphi\|_{L^\infty} (1 + |v|^\delta) \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,p}(s, v_2) (1 + |v_2|^\delta) dv_2. \end{aligned}$$

As a consequence, we can extract from $(\kappa_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ a subsequence which converges a.e. in $[0, T] \times \mathbb{R}^3$. Since moreover

$$|\kappa_p(s, v)| \leq Cst \|\varphi\|_{L^\infty} (1 + |v|^\delta) \int_{\mathbb{R}^3} f_{2,p}(s, v_2) (1 + |v_2|^\delta) dv_2,$$

the weak* convergence of $(f_{2,p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ in $L^\infty([0, T]; L^1(\mathbb{R}^3, (1 + |v|) dv))$ implies that $\lim_{p \rightarrow \infty} J_{3,p}^2 = 0$. This ends the proof of Proposition 5.4. \diamond

We can then deduce from Proposition 5.4 that f_1 and f_2 are weak solution of (5.24) – (5.26), in the sense given by (5.28) and (5.29). This ends also the Proof of Theorem 5.1. \diamond

Remark 5.1 Note that $f_{1,in}$ being a function (that is, not only a measure), the solution of the equation

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \operatorname{div}_v (K(f_2) f_1) = 0$$

is itself a function, given by

$$f_1(t, v, r) = f_{1,in} \left(v - \int_0^t K(f_2)(s, r) ds, r \right).$$

Chapitre 6

Simulation numérique du modèle Vlasov/Boltzmann et application à un scénario d'accident de perte de vide dans ITER

Sommaire

6.1	Introduction	202
6.2	Comparaison des modèles Boltzmann/Boltzmann et Vlasov/Boltzmann	203
6.2.1	Modèles mathématiques	203
6.2.2	Méthode numérique	205
6.2.3	Simulations numériques	209
6.2.4	Conclusion	217
6.3	Étude du transport de particules de poussière dans un scénario	
	d'accident de perte de vide	218
6.3.1	Boîte ouverte	218
6.3.2	Boîte fermée	220
6.4	Modèle de mobilisation des particules de poussière sur les parois	224

6.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre la simulation numérique d'un accident de perte de vide dans des conditions de densité et de rayon de particules de poussière comparables à celles du réacteur ITER. La modélisation utilisée est basée sur les modèles asymptotiques établis au Chapitre 4.

Pour cela, nous commençons dans la section 6.2 par comparer numériquement les modèles dits Boltzmann/Boltzmann (B/B) et Vlasov/Boltzmann (V/B). Pour le modèle Boltzmann/Boltzmann, dont nous avons présenté la mise-en-œuvre numérique au Chapitre 3, le mouvement des particules de poussière est régi par une équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_x f_1 = R_1(f_1, f_2), \quad (6.1)$$

et celui des molécules est également régi par une équation de Boltzmann. Pour les modèles de type Vlasov/Boltzmann, l'équation (6.1) est remplacée par une équation de Vlasov du type

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_x f_1 + \operatorname{div}_v (f_1 \Upsilon(f_2)) = 0, \quad (6.2)$$

dans laquelle $\Upsilon(f_2) = \Upsilon(f_2)(t, x, v, r)$ est une accélération s'appliquant sur les particules de poussière. Nous présentons ces modèles au paragraphe 6.2.1. L'équation (6.2) est résolue par une méthode déterministe de type Particles In Cell (PIC). Nous validons comme au Chapitre 3 cette méthode dans le cas homogène en espace sur l'exemple du modèle à section pseudo-maxwellienne. De plus, nous comparons l'évolution des vitesses macroscopiques des deux espèces dans le cas homogène en espace pour les différents modèles.

Nous utilisons ensuite dans la section 6.3 ces modèles pour simuler la mobilisation et le déplacement de particules de poussière lors d'un accident de perte de vide.

Dans la section 6.4, nous présentons un modèle de mobilisation des particules de poussière adhérentes aux parois. Celui-ci est basé sur l'équation (6.2) pour la description du mouvement des particules. Nous prévoyons d'intégrer prochainement ce modèle au code.

Les simulations numériques présentées dans les Chapitres 3 et 6 ont été réalisées au CEA de Saclay avec la collaboration de Philippe Roblin. Nous avons pris pour base un code DSMC non parallèle (développé par Philippe Roblin pour le cas des mélanges gazeux) dans lequel nous avons implémenté la méthode de Nanbu et le mécanisme collisionnel par réflexion diffuse pour les collisions entre particules de poussière et molécules présenté au Chapitre 3 (correspondant au système Boltzmann/Boltzmann). Nous avons ensuite effectué à partir de ce code des essais numériques, d'une part dans un cadre spatialement homogène (présentés dans la section 3.5 du Chapitre 3), et d'autre part dans un cadre spatialement inhomogène dans le contexte d'un accident de perte de vide. Nous avons ensuite amélioré le code en y ajoutant la simulation du couplage Vlasov/Boltzmann présenté dans ce Chapitre, pour les différents types de terme de trainée Υ . L'étude numérique de ce modèle dans le cadre spatialement homogène est présenté dans la section 6.2.3. Enfin, la parallélisation de ce code a été effectuée au cours du stage de Pierre Barthelet (étudiant en deuxième année à Supélec) à partir d'une version parallèle du code DSMC pour mélanges gazeux développée par le Centre de Calcul Recherche et Technologie (qui est une des composantes

du complexe de calcul scientifique du CEA localisé sur le site de Bruyères-le-Châtel). Nous avons alors pu mener d'autres études à partir de cette version parallèle, comme avec des boîtes de plus grandes tailles ou une nouvelle géométrie en cylindre torique (présentée au paragraphe 6.3.2).

6.2 Comparaison des modèles Boltzmann/Boltzmann et Vlasov/Boltzmann

6.2.1 Modèles mathématiques

Nous supposons comme au Chapitre 3 que les particules de poussière ont toutes le même rayon noté r_p . Rappelons que le modèle dit Boltzmann/Boltzmann s'écrit

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_x f_1 = R_1(f_1, f_2), \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v_2 \cdot \nabla_x f_2 = R_2(f_1, f_2) + Q_{sd}(f_2, f_2), \quad (6.4)$$

où $f_1 := f_1(t, x, v)$ est la distribution en particules de poussière, $f_2 := f_2(t, x, v)$ est la distribution en molécules de gaz, $t \in \mathbb{R}^+$ représente le temps, $v \in \mathbb{R}^3$ la vitesse et $x \in \Omega$ la position, Ω étant un domaine borné de l'espace. L'opérateur de collision entre molécules $Q_{sd}(f_2, f_2)$ est donné par

$$\begin{aligned} & Q_{sd}(f_2, f_2)(t, x, v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [f_2(t, x, v') f_2(t, x, v'_*) - f_2(t, x, v) f_2(t, x, v_*)] \varrho^2 |v - v_*| d\sigma dv_*, \end{aligned} \quad (6.5)$$

où ϱ est le rayon des molécules de gaz et où

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \quad (6.6)$$

$$v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma. \quad (6.7)$$

Les opérateurs de collision entre molécules et particules de poussière $R_1(f_1, f_2)$ et $R_2(f_1, f_2)$ correspondent, comme au Chapitre 3, au modèle dit de réflexion diffuse. Ceux-ci sont donnés sous forme faible par

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} R_i(f_1, f_2)(t, x, v) \varphi(v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} [\varphi(v_i'') - \varphi(v_i)] f_1(t, x, v_1) f_2(t, x, v_2) \\ &\quad \times \varsigma(v_1 - v_2, n) h_n(w) dndwdv_2 dv_1 \end{aligned} \quad (6.8)$$

pour $i = 1, 2$, où v_1'' et v_2'' sont les vitesses post-collisionnelles données par

$$v_1'' = \frac{1}{1 + \varepsilon} (v_1 + \varepsilon v_2 - \varepsilon w),$$

et

$$v_2'' = \frac{1}{1 + \varepsilon} (v_1 + \varepsilon v_2 + w).$$

La fonction ς est donnée par

$$\varsigma(v, n) = (r_p + \varrho)^2 [n \cdot v] \mathbb{1}_{\{n \cdot v > 0\}} \quad (6.9)$$

dans le cas d'une section pré-collisionnelles de sphères dures, et par

$$\varsigma(v, n) = C_m \quad (6.10)$$

dans le cas d'une section pseudo-maxwellienne .

Nous nous intéressons dans ce Chapitre à des modèles asymptotiques de type

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_x f_1 + \operatorname{div}_{v_1} (f_1 \Upsilon(f_2)) = 0, \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v_2 \cdot \nabla_x f_2 = R_2(f_1, f_2) + Q_{sd}(f_2, f_2), \quad (6.12)$$

où le terme d'accélération $\Upsilon(f_2) := \Upsilon(f_2)(t, x, v_1, r)$ peut prendre différentes expressions. Celles-ci proviennent des différents développements asymptotiques de l'opérateur $R_1(f_1, f_2)$ effectués au Chapitre 4. Rappelons que nous avons considéré deux adimensionnements différents.

Dans le premier cas les vitesses sont adimensionnées à partir de deux ordres de grandeur de vitesses différents, notés V_1° et V_2° , liés par la relation

$$V_1^\circ = \sqrt{\varepsilon} V_2^\circ, \quad (6.13)$$

où ε est le rapport de masse entre une molécule et une particule de poussière. Le développement asymptotique de l'opérateur $R_1(f_1, f_2)$ adimensionné permet alors d'obtenir un terme de traînée noté $\Upsilon_a(f_2)$ qui, ré-exprimé en variables dimensionnées, est donné par

$$\Upsilon_{a,sd}(f_2)(t, x) = \pi \varepsilon r_p^2 \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) \left[|v_2| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] v_2 dv_2 \quad (6.14)$$

dans le cas d'une section de sphères dures (*cf.* (4.62) pour l'expression adimensionnée $\bar{\Upsilon}_{a,sd}(\check{f}_2)$ de ce terme, et l'Annexe E pour le détail de son re-dimensionnement), et

$$\Upsilon_{a,m}(f_2)(t, x) = 4\pi \varepsilon C_m \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) v_2 dv_2 \quad (6.15)$$

dans le cas d'une section pseudo-maxwellienne (*cf.* (4.63) et Annexe E). Remarquons que les termes $\Upsilon_{a,sd}(f_2)$ et $\Upsilon_{a,m}(f_2)$ ne dépendent pas de la variable v_1 . Nous verrons que cette propriété simplifie la résolution numérique des équations (6.11) et (6.12). Cependant, la quantité de mouvement n'est pas conservée.

Dans le second cas, le développement asymptotique est effectué à partir de l'hypothèse que les vitesses moyennes des espèces sont du même ordre de grandeur V° . On obtient, en variables dimensionnées, un terme de traînée noté $\Upsilon_b(f_2)$ donné par

$$\Upsilon_{b,sd}(f_2)(t, x, v_1) = \pi \varepsilon r_p^2 \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) \left[|v_2 - v_1| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] (v_2 - v_1) dv_2 \quad (6.16)$$

dans le cas d'une section de sphère dure, et

$$\Upsilon_{b,m}(f_2)(t, x, v_1) = 4\pi \varepsilon C_m n_{f_2}(t, x) (\mathbf{u}_{f_2}(t, x) - v_1) \quad (6.17)$$

dans le cas d'une section pseudo-maxwellienne. Sous des conditions aux limites adéquates (ou dans le cas d'un système homogène en espace), la quantité de mouvement est cette fois conservée, à $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ près.

6.2.2 Méthode numérique

Nous présentons maintenant la méthode numérique utilisée pour résoudre le couplage (6.11)–(6.12) muni des conditions initiales

$$f_1(0, x, v) = f_{1,in}(x, v),$$

$$f_2(0, x, v) = f_{2,in}(x, v).$$

Comme dans le cas du système Boltzmann/Boltzmann, celle-ci consiste à effectuer tout d'abord une approximation particulière des conditions initiales $f_{1,in}$ et $f_{2,in}$ sous la forme

$$f_{i,in}(x, v) \simeq \sum_{k=1}^{N_i} \omega_i^k \delta(x - x_{i,in}^k) \delta(v - v_{i,in}^k),$$

puis un splitting entre les différents opérateurs. L'équation (6.12) est résolue de la même façon qu'au Chapitre 3, c'est-à-dire en résolvant l'équation de transport libre

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v_2 \cdot \nabla_x f_2 = 0, \quad (6.18)$$

puis en résolvant localement dans chaque maille d'espace les équations

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = Q_{sd}(f_2, f_2) \quad (6.19)$$

par la méthode de Bird, et

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = R_2(f_1, f_2) \quad (6.20)$$

par la méthode de Nanbu. Les densités f_1 et f_2 sont approchées par des combinaisons linéaires de masses de Dirac

$$f_2(t, x, v) \simeq \sum_{j=1}^{N_2} \omega_2 \delta(x - x_2^j(t)) \delta(v - v_2^j(t)),$$

(les poids ω_2 de f_2 sont tous égaux si l'on utilise la méthode de Bird) et

$$f_1(t, x, v) \simeq \sum_{k=1}^{N_1} \omega_1^k \delta(x - x_1^k(t)) \delta(v - v_1^k(t)).$$

Les poids ω_1^k , qui peuvent a priori dépendre du temps, sont constants grâce à la forme conservative de l'équation (6.11) (*cf.* Annexe D). Nous utilisons une méthode de type PIC pour résoudre l'équation (6.11). Les positions et les vitesses des particules numériques de poussière sont modifiées en résolvant le système (*cf.* Annexe D)

$$\frac{dx_1^k}{dt} = v_1^k, \quad (6.21)$$

$$\frac{dv_1^k}{dt} = \Upsilon(f_2)(t, x_1^k, v_1^k). \quad (6.22)$$

Le terme $\Upsilon(f_2)$ est approché au temps t^n en utilisant l'approximation particulière de la densité f_2 . Pour cela, on approche f_2 par sa moyenne locale dans chaque maille, c'est-à-dire par

$$f_2(t, x, v) \simeq \frac{1}{V_c} \sum_{j=1}^{N_{2c}} \omega_2 \delta(v - v_2^j(t)) \mathbb{1}_{\{x \in c\}} \quad (6.23)$$

dans chaque maille c de volume V_c (contenant N_{2c} molécules numériques). En écrivant ensuite $\Upsilon(f_2)$ sous la forme

$$\Upsilon(f_2)(t, x, v_1) = \int_{\mathbb{R}^3} h(v_1, v_2) f_2(t, x, v_2) dv_2,$$

où h est une fonction continue, on approche alors $\Upsilon(f_2)(t^n, x_1^k, v_1^k)$ localement dans chaque maille c contenant la position x_1^k par

$$\Upsilon(f_2)(t^n, x_1^k, v_1^k) \approx \Upsilon^{c,n}(v_1^k) := \omega_2 \sum_{i=0}^{N_{2c}} h(v_1^k, v_2^i),$$

la sommation étant effectuée sur toutes les molécules numériques contenues dans la maille c .

Dans le cas du premier modèle, le terme $\Upsilon_{a,sd}(f_2)(t^n, x_1^k)$ est approché par

$$\Upsilon_{a,sd}^{c,n} = \pi \varepsilon r_p^2 \frac{\omega_2}{V_c} \sum_{j=0}^{N_{2c}} V_2^{n,j} \left[|V_2^{n,j}| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right],$$

où $V_2^{n,j}$ est l'approximation de $v_2^j(t)$ au temps t^n , et $\Upsilon_{a,m}(f_2)(t^n, x_1^k)$ est approché par

$$\Upsilon_{a,m}^{c,n} = 4\pi \varepsilon C_m \frac{\omega_2}{V_c} \sum_{j=0}^{N_{2c}} V_2^{n,j}.$$

Le système (6.21)–(6.22) est alors résolu par le schéma numérique suivant : pour tout $k \in \{1, \dots, N_{1c}\}$,

$$\begin{cases} \frac{X_1^{k,n+1} - X_1^{k,n}}{\Delta t} = V_1^{k,n}, \\ \frac{V_1^{k,n+1} - V_1^{k,n}}{\Delta t} = \Upsilon_a^{c,n}, \end{cases} \quad (6.24)$$

où $\Upsilon_a^{c,n}$ désigne $\Upsilon_{a,sd}^{c,n}$ ou $\Upsilon_{a,m}^{c,n}$, et $X_1^{k,n}$ et $V_1^{k,n}$ sont les approximations des fonctions $x_1^k(t)$ et $v_1^k(t)$ à l'instant t^n .

Dans le cas du second modèle, le terme $\Upsilon_{b,sd}(f_2)(t^n, x_1^k, v_1^k)$ est approché par

$$\Upsilon_{b,sd}^{c,n}(V_1^{k,n}) = \pi \varepsilon r_p^2 \frac{\omega_2}{V_c} \sum_{j=0}^{N_{2c}} (V_2^{n,j} - V_1^{k,n}) \left[|V_2^{n,j} - V_1^{k,n}| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right],$$

et le terme $\Upsilon_{b,m}(f_2)(t^n, x_1^k, v_1^k)$ est approché par

$$\Upsilon_{b,m}^{c,n}(V_1^{k,n}) = 4\pi \varepsilon C_m \frac{\omega_2}{V_c} \left(\sum_{j=0}^{N_{2c}} V_2^{n,j} - N_{2c} V_1^{k,n} \right). \quad (6.25)$$

Le système (6.21)–(6.22) est alors résolu par le schéma numérique suivant : pour tout $k \in \{1, \dots, N_{1c}\}$:

$$\begin{cases} \frac{X_1^{k,n+1} - X_1^{k,n}}{\Delta t} = V_1^{k,n}, \\ \frac{V_1^{k,n+1} - V_1^{k,n}}{\Delta t} = \Upsilon_b^{c,n}(V_1^{k,n}), \end{cases} \quad (6.26)$$

où $\Upsilon_b^{c,n}$ désigne $\Upsilon_{b,sd}^{c,n}$ ou $\Upsilon_{b,m}^{c,n}$.

Remarque 6.1 Lorsque $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{b,sd}(f_2)$ ou $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{b,m}(f_2)$, la résolution numérique de l'équation (6.2) nécessite à chaque pas de temps le calcul du terme d'accélération $\Upsilon_b^{c,n}(V_1^{k,n})$ pour chaque particule de poussière numérique, chacun étant calculé en effectuant une sommation sur N_{2c} termes dans chaque maille. On aura donc un coût de calcul en $O(N_{1c}N_{2c})$ dans chaque maille c . Lorsque $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{a,sd}(f_2)$ ou $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{a,m}(f_2)$, le terme d'accélération est le même pour chaque particule de poussière numérique. Le coût de calcul est alors dans ce cas seulement en $O(N_{2c})$ dans chaque maille c .

Condition sur Δt relative à la résolution de l'équation (6.4). Comme au Chapitre 3, la résolution de la partie transport (6.18) de l'équation (6.4) impose dans le contexte inhomogène en espace la condition suivante sur le pas de temps

$$\overline{v_2} \Delta t \leq \Delta x, \quad (6.27)$$

où Δx correspond à la longueur d'une maille, et $\overline{v_2}$ est la vitesse moyenne des molécules à l'intérieur de la maille. En approchant celle-ci par la vitesse thermique moyenne $\langle v_2 \rangle$, on peut estimer que dans les conditions physiques dans lesquelles on se place, on a

$$\overline{v_2} \sim 5 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ainsi, dans une maille de cellule de $5 \cdot 10^{-4}$ m de côté, la condition (6.27) correspond à

$$\Delta t \leq 10^{-6} \text{ s}. \quad (6.28)$$

Par ailleurs, la résolution des équations homogène en espace (6.19) et (6.20) par des méthodes de Bird et de Nanbu sans compteur de temps dans chaque maille c amène la condition suivante (cf. Chapitre 3) :

$$\Delta t \leq \min(1/\nu_{21}^c, 1/\nu_{22}^c), \quad (6.29)$$

où ν_{21}^c est la fréquence des collisions de types molécules-particules de poussière, et ν_{22}^c la fréquence des collisions entre molécules dans la maille c . En supposant les densités

locales n_{1c} et n_{2c} à l'intérieur de chaque maille sont uniformes et de l'ordre de n_1° et n_2° respectivement, on peut alors (*cf.* Chapitre 3) ré-exprimer la condition (6.29) sous la forme

$$\Delta t \leq \frac{1}{\pi < v_2 > r_p^2 n_2^\circ} \min \left(\frac{n_2^\circ}{n_1^\circ}, \frac{r_p^2}{4\rho^2} \right). \quad (6.30)$$

Dans le cas de particules de poussière de rayon $r_p = 10^{-7}$ m et de densités moyennes égales à $n_1^\circ = 10^{14}$ m⁻³ et $n_2^\circ = 10^{21}$ m⁻³ par exemple, on trouve une condition sur Δt du type $\Delta t \leq 2 \cdot 10^{-6}$ s, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que la condition (6.28).

Condition sur Δt relative à la résolution de l'équation (6.2). La première équation du schéma numérique (6.24) ou (6.26), correspondant à la partie transport de l'équation (6.2), impose comme précédemment de prendre

$$\bar{v}_1 \Delta t \leq \Delta x, \quad (6.31)$$

où Δx correspond à la longueur d'une maille et \bar{v}_1 est la vitesse moyenne des particules de poussière à l'intérieur de la maille. En approchant celles-ci par la vitesse thermique moyenne $< v_1 >$, on peut estimer que dans les conditions physiques dans lesquelles on se place, on a

$$10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \leq \bar{v}_1 \leq 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ainsi, dans une maille de cellule de $5 \cdot 10^{-4}$ m de côté la condition (6.27) sur le pas de temps est au pire

$$\Delta t \leq 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}. \quad (6.32)$$

De plus, dans le cas du schéma (6.26), le terme d'accélération $\Upsilon_b^{c,n}$ dépend de $V_1^{k,n}$ et le schéma numérique sur les vitesses des particules

$$\frac{V_1^{k,n+1} - V_1^{k,n}}{\Delta t} = \Upsilon_b^{c,n}(V_1^{k,n})$$

peut donc également imposer une condition sur le pas de temps. Celle-ci étant délicate à déterminer dans le cas où $\Upsilon_b^{c,n} = \Upsilon_{b,sd}^{c,n}$, raisonnons sur le cas où $\Upsilon_b^{c,n} = \Upsilon_{b,m}^{c,n}$. On a dans ce cas

$$V_1^{k,n+1} = 4\pi\epsilon C_m \frac{\omega_2}{V_c} \Delta t \left(\sum_{i=0}^{N_{2c}} V_2^{j,n} \right) + (1 - 4\pi\epsilon C_m n_{2c} \Delta t) V_1^{k,n}.$$

On peut estimer que pour que le schéma reste stable, il faut avoir

$$|1 - 4\pi\epsilon C_m n_{2c} \Delta t| < 1,$$

c'est-à-dire

$$\Delta t < \frac{1}{2\pi\epsilon C_m n_{2c}}.$$

Pour obtenir une approximation de la condition sur le pas de temps dans le cas d'une section de sphères dures, nous prenons, d'après (6.9) et (6.10), C_m égal à

$$C_m = \frac{r_p^2}{4} < v_2 >.$$

De plus, en remplaçant la densité locale n_{2c} par n_2° , on aboutit à la condition

$$\Delta t \leq \frac{2}{\pi r_p^2 \varepsilon n_2^\circ \langle v_2 \rangle}. \quad (6.33)$$

Dans le cas de particules de poussière de rayon $r_p = 10^{-7}$ m et d'une densité $n_2^\circ = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ par exemple, on obtient la condition $\Delta t \leq 10^{-1}$ s. De façon plus générale, si on se place dans le contexte déjà considéré aux Chapitres 4 et 5 où

$$\left(\frac{\varrho}{r_p}\right)^2 = \left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^{2/3} \sim \frac{\alpha^\circ}{4\pi},$$

et

$$\alpha^\circ \sim \sqrt{\varepsilon},$$

on constate alors la condition (6.30) est plus restrictive que la condition (6.33). Nous supposons dans la suite que cette analyse est encore valable pour le schéma (6.26) lorsque $\Upsilon_b^{c,n} = \Upsilon_{b,sd}^{c,n}$.

On constate donc que la condition la résolution de l'équation (6.4) impose un pas de temps plus petit que la résolution de l'équation (6.2). On peut donc imaginer que l'équation (6.2) puisse être résolue avec un pas de temps plus grand que celui imposé par l'équation (6.4). De plus, comme on l'a évoqué dans la Remarque 6.1, le coût de la simulation de l'équation (6.2) lorsque $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{b,m}(f_2)$ ou $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{b,sd}(f_2)$ est relativement élevé, et ne dépend pas du pas de temps Δt mais des nombres N_{1c} et N_{2c} dans chaque maille. Nous avons donc introduit un paramètre entier $n_{\Delta t}$ tel que l'équation (6.2) ne soit résolue que tous les $n_{\Delta t}$ pas de temps, tandis que l'équation (6.4) est résolue à chaque pas de temps. Bien entendu, ce paramètre $n_{\Delta t}$ doit vérifier, d'après les conditions (6.31), (6.30) et (6.33)

$$n_{\Delta t} \leq \max \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{n_1^\circ}{n_2^\circ}, \frac{1}{\varepsilon} \frac{4\varrho^2}{r_p^2} \right), \quad (6.34)$$

et

$$n_{\Delta t} \Delta t \leq \frac{\Delta x}{\langle v_1 \rangle}.$$

L'introduction de ce paramètre $n_{\Delta t}$, bien que non légitimée de façon rigoureuse, sera validée numériquement.

6.2.3 Simulations numériques

Nous présentons ici les résultats de simulations numériques dans le cas spatialement homogène. Le but de ces simulations est de comparer numériquement, au travers de l'évolution des vitesses macroscopiques, les différents systèmes : d'une part le système (6.3)–(6.4), avec $R_1 = R_1^d$ et $R_2 = R_2^d$, d'autre part le système (6.11)–(6.12) avec $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{a,sd}(f_2)$, et enfin le système (6.11)–(6.12) avec $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{b,sd}(f_2)$ (l'équation (6.11) étant résolue par une méthode PIC). Nous comparons de plus le temps CPU d'une simulation (sur mono-processeur) avec les différents modèles. Cette étude fait l'objet des paragraphes 6.2.3.1 et 6.2.3.2.

Par ailleurs, nous examinons au paragraphe 6.2.3.3 la validité de la méthode numérique décrite précédemment grâce au modèle dit pseudo-maxwellien. Pour cela, nous comparons l'évolution des vitesses macroscopiques des espèces obtenues via la simulation du système 6.2–6.4 homogène en espace par couplage PIC/Nanbu aux expressions établies de façon formelle.

6.2.3.1 Comparaison des systèmes (6.3)-(6.4) et (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{b,sd}(f_2)$

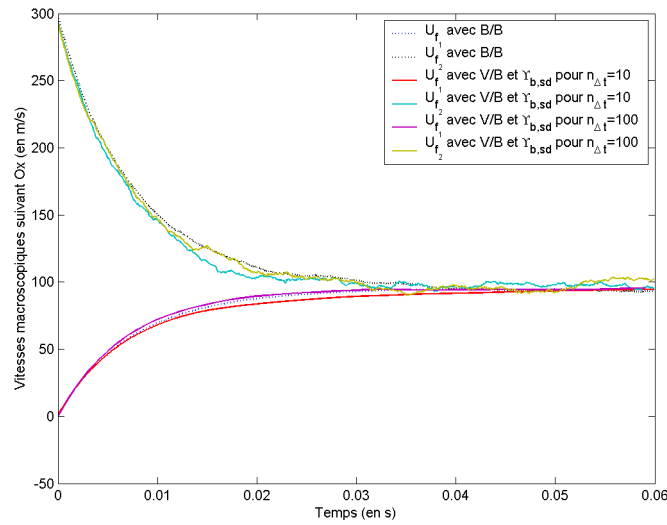


FIG. 6.1 – Comparaison de l'évolution de la composante suivant Ox des vitesses macroscopiques déduites des systèmes (6.3)-(6.4) et (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$.

Nous comparons ici la résolution numérique dans le cadre spatialement homogène du système (6.3)–(6.4) (par la méthode de Nanbu introduite au Chapitre 3) avec celle du système (6.2)–(6.4) pour $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{b,sd}(f_2)$. On se place dans les conditions physiques suivantes :

$$\begin{cases} r_p &= 5 \cdot 10^{-9} \text{ m}, \\ n_1 &= 10^{15} \text{ m}^{-3}, \\ n_2 &= 10^{20} \text{ m}^{-3}, \\ T_{surf} &= 500 \text{ K}. \end{cases} \quad (6.35)$$

Les densités initiales sont données par des Maxwelliennes

$$f_{1,in}(v) = M_{n_1, \mathbf{u}_{1,in}, T_{1,in}},$$

et

$$f_{2,in}(v) = M_{n_2, \mathbf{u}_{2,in}, T_{2,in}},$$

dans lesquelles

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{1,in} &= (0, 0, 0) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \mathbf{u}_{2,in} &= (300, 300, 300) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ T_{1,in} &= 100 \text{ K}, \\ T_{2,in} &= 300 \text{ K}. \end{cases}$$

On choisit les nombres de particules et molécules numériques égaux à

$$\begin{cases} N_1 &= 5 \cdot 10^2, \\ N_2 &= 5 \cdot 10^3. \end{cases}$$

Dans le cas du système (6.3)–(6.4), on choisit $\Delta t = 10^{-7}$ s. Dans le cas du système (6.2)–(6.4), Δt doit cette fois vérifier la condition (6.30). On peut donc choisir celui-ci plus grand, égal à $\Delta t = 10^{-5}$ s. De plus, nous prenons un rapport de pas de temps $n_{\Delta t}$ vérifiant, d’après (6.34), $n_{\Delta t} \leq 1500$.

La figure 6.1 montre l’évolution des vitesses macroscopiques suivant l’axe Ox des deux espèces pour le système B/B (6.3)–(6.4) avec ς donnée par (6.9), pour le système V/B (6.2)–(6.4) avec $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{b,sd}(f_2)$ et $n_{\Delta t} = 10$, et pour le système V/B (6.2)–(6.4) avec $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{b,sd}(f_2)$ et $n_{\Delta t} = 100$. On peut alors constater que l’évolution des vitesses macroscopiques est similaire dans les trois cas.

Le tableau 6.1 montre la comparaison des temps CPU des simulations des systèmes B/B et V/B, avec les paramètres présentés ci-dessus (pour un calcul sur monoprocesseur). On constate que pour cet exemple, la simulation du système (6.2)–(6.4) est plus rapide que celle du système B/B, à condition de choisir un rapport de temps $n_{\Delta t}$ suffisamment grand.

Modèle	Temps CPU
Système B/B (6.3)–(6.4)	709
Système V/B (6.2)–(6.4) avec $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$ et $n_{\Delta t} = 1$	1683
Système V/B (6.2)–(6.4) avec $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$ et $n_{\Delta t} = 10$	193
Système V/B (6.2)–(6.4) avec $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$ et $n_{\Delta t} = 100$	31

TAB. 6.1 – Comparaison des Temps CPU (en s) pour les systèmes (6.3)–(6.4) et (6.2)–(6.4) avec $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_b(f_2)$, pour des valeurs de densité et de rayon de particules données par (6.35).

Cet écart de temps de simulation est plus flagrant dans d’autres situations. Le tableau 6.2 montre la comparaison des temps CPU pour les systèmes B/B et V/B pour les conditions physiques

$$\begin{cases} r_p &= 2 \cdot 10^{-8} \text{ m}, \\ n_1 &= 5 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}, \\ n_2 &= 10^{20} \text{ m}^{-3}, \end{cases} \quad (6.36)$$

pendant un temps $\tau = 10^{-1}$ s (correspondant au temps caractéristique de convergence des vitesses) et des nombres de particules et molécules numériques égaux à $N_1 = 10^2$ et

$N_2 = 10^4$. Pour le système B/B, le pas de temps est pris égal à $\Delta t = 10^{-8}$ s, tandis que pour le système V/B, on choisit $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$ s. Les nombres moyens de collision effectués pendant le temps τ , donnés par (3.26), (3.29) et (3.30), pour la résolution du système B/B, valent

$$\overline{N_{coll}^{12}}(\tau) = 1,4 \cdot 10^9,$$

$$\overline{N_{coll}^{21}}(\tau) = 7 \cdot 10^4,$$

et

$$\overline{N_{coll}^{22}}(\tau) = 4,2 \cdot 10^7.$$

On constate alors (*cf.* tableau 6.2) que la simulation du système V/B est dans ce cas largement plus rapide que celle du système B/B, même avec $n_{\Delta t} = 1$.

Modèle	Temps CPU
Système B/B (6.3)-(6.4)	11410
Système V/B (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$ et $n_{\Delta t} = 1$	589
Système V/B (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$ et $n_{\Delta t} = 10$	92
Système V/B (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$ et $n_{\Delta t} = 100$	43

TAB. 6.2 – Comparaison des Temps CPU (en s) pour les systèmes (6.3)-(6.4) et (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_b(f_2)$, pour des valeurs de densité et de rayon de particules donnés par (6.36).

6.2.3.2 Comparaison des systèmes (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{a,sd}(f_2)$ et (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon(f_2) = \Upsilon_{b,sd}(f_2)$

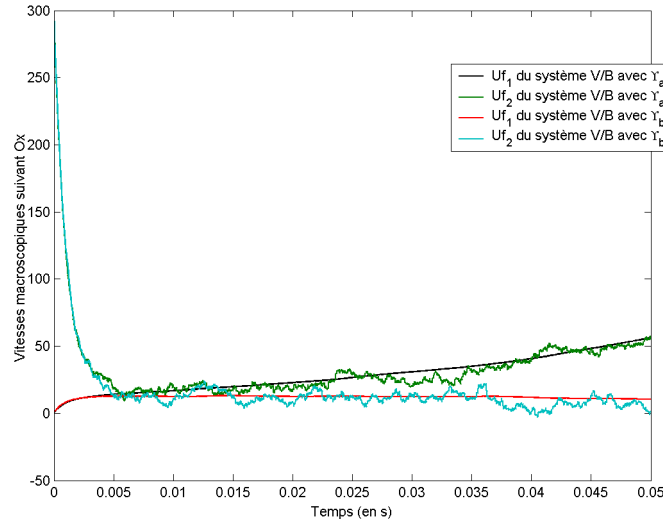


FIG. 6.2 – Comparaison de l'évolution des vitesses macroscopiques des systèmes (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon_{a,sd}(f_2)$ et (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$.

Nous considérons ici les conditions physiques suivantes :

$$\begin{cases} r_p &= 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}, \\ n_1 &= 10^{14} \text{ m}^{-3}, \\ n_2 &= 10^{21} \text{ m}^{-3}, \\ T_{surf} &= 500 \text{ K}. \end{cases}$$

Les densités initiales sont données par des Maxwelliennes

$$f_{1,in}(v) = M_{n_1, \mathbf{u}_{1,in}, T_{1,in}}, \quad (6.37)$$

et

$$f_{2,in}(v) = M_{n_2, \mathbf{u}_{2,in}, T_{2,in}}, \quad (6.38)$$

dans lesquelles

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{1,in} &= (0, 0, 0) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \mathbf{u}_{2,in} &= (300, 300, 300) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ T_{1,in} &= 100 \text{ K}, \\ T_{2,in} &= 300 \text{ K}. \end{cases}$$

Les paramètres numériques sont pris égaux à

$$\begin{cases} \Delta t &= 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}, \\ N_2 &= 5 \cdot 10^3, \\ N_1 &= 5 \cdot 10^2. \end{cases}$$

Nous comparons l'évolution de l'une des composantes des vitesses macroscopiques des espèces pour le système V/B (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$ et le système (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon_{a,sd}(f_2)$. On observe que si l'évolution de ces vitesses est similaire durant 5 ms environ, elle ne l'est pas après un temps suffisamment long. Cela s'explique par le fait que la quantité de mouvement n'est pas conservée dans le modèle avec $\Upsilon_{a,sd}(f_2)$.

La comparaison des temps CPU entre ces deux modèles est faite dans le tableau 6.3. On constate que, comme attendu, le terme $\Upsilon_{a,sd}(f_2)$ est plus rapide à simuler que le terme $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$. Cependant, cette différence de temps devient assez faible lorsque $n_{\Delta t}$ augmente.

	V/B avec $\Upsilon_{a,sd}(f_2)$	V/B avec $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$
$n_{\Delta t} = 1$	613	1710
$n_{\Delta t} = 10$	118	1478
$n_{\Delta t} = 100$	114	243

TAB. 6.3 – Comparaison des Temps CPU (en s) pour les systèmes V/B (6.2)-(6.4) avec $\Upsilon_{a,sd}(f_2)$ et $\Upsilon_{b,sd}(f_2)$.

6.2.3.3 Validation dans le cas d'une section pseudo-maxwellienne

Nous présentons ici une validation de la méthode numérique proposée précédemment dans le cas spatialement homogène, grâce au modèle à section pseudo-maxwellienne. On

considère pour cela les deux systèmes

$$(A) \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \operatorname{div}_{v_1} (f_1 \Upsilon_{a,m}(f_2)) = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = R_2(f_1, f_2) + Q_{sd}(f_2, f_2), \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \operatorname{div}_{v_1} (f_1 \Upsilon_{b,m}(f_2)) = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = R_2(f_1, f_2) + Q_{sd}(f_2, f_2), \end{cases}$$

dans lesquels $\Upsilon_{a,m}(f_2)$ et $\Upsilon_{b,m}(f_2)$ sont donnés par (6.15) et (6.17). On vérifie immédiatement que, dans chacun des cas, les densités n_{f_1} et n_{f_2} vérifient formellement

$$\frac{dn_{f_1}}{dt} = \frac{dn_{f_2}}{dt} = 0,$$

et sont donc constantes. On note n_1 et n_2 ces densités.

Évolution des vitesses macroscopiques dans le cas du système (B).

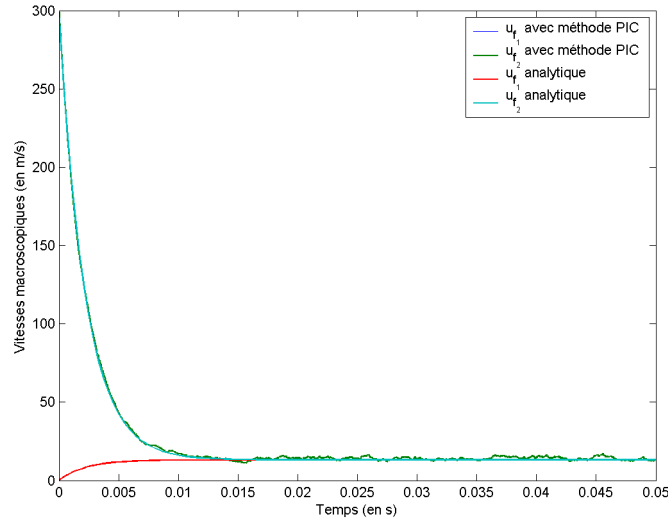


FIG. 6.3 – Comparaison entre les vitesses macroscopiques obtenues via la résolution numérique du système (B) par une méthode PIC/Nanbu et les expressions des vitesses données par (6.39) et (6.40).

On montre de façon formelle via des calculs similaires ceux menés au Chapitre 3, que les vitesses macroscopiques \mathbf{u}_{f_1} et \mathbf{u}_{f_2} déduites du système (B) sont solutions du système

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}_{f_1}}{dt} = 4\pi\epsilon C_m n_2 (\mathbf{u}_{f_2} - \mathbf{u}_{f_1}), \\ \frac{d\mathbf{u}_{f_2}}{dt} = \frac{4\pi}{1+\epsilon} C_m n_1 (\mathbf{u}_{f_1} - \mathbf{u}_{f_2}). \end{cases}$$

Cela nous permet d'obtenir, toujours formellement, l'évolution de ces vitesses macroscopiques :

$$\mathbf{u}_{f_1}(t) = \left(\mathbf{u}_{f_{1,in}} - \mathbf{u}_\varepsilon^\infty \right) \exp(-t/\tau_\varepsilon) + \mathbf{u}_\varepsilon^\infty, \quad (6.39)$$

$$\mathbf{u}_{f_2}(t) = \left(\mathbf{u}_{f_{2,in}} - \mathbf{u}_\varepsilon^\infty \right) \exp(-t/\tau_\varepsilon) + \mathbf{u}_\varepsilon^\infty, \quad (6.40)$$

où

$$\tau_\varepsilon = \frac{1 + \varepsilon}{4\pi C_m(n_1 + \varepsilon(1 + \varepsilon)n_2)} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_\varepsilon^\infty = \frac{(n_1 \mathbf{u}_{f_{1,in}} + \varepsilon(1 + \varepsilon)n_2 \mathbf{u}_{f_{2,in}})}{n_1 + \varepsilon(1 + \varepsilon)n_2}.$$

En particulier, on remarque que \mathbf{u}_{f_1} et \mathbf{u}_{f_2} convergent vers une unique limite donnée par $\mathbf{u}_\varepsilon^\infty$, qui, à $O(\varepsilon)$ près, correspond à la vitesse limite des vitesses macroscopiques déduite du système (6.3)–(6.4) homogène en espace (*cf.* Chapitre 3). Nous présentons sur la figure 6.3 les vitesses macroscopiques suivant Ox obtenues via la résolution numérique du système (B) et via les formules analytiques (6.39) et (6.40) avec les valeurs physiques suivantes :

$$\begin{cases} r_p &= 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}, \\ n_1 &= 10^{14} \text{ m}^{-3}, \\ n_2 &= 10^{21} \text{ m}^{-3}, \\ T_{surf} &= 500 \text{ K}. \end{cases}$$

Les densités initiales $f_{1,in}$ et $f_{2,in}$ sont données par (6.37) et (6.38), avec

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{1,in} &= (0, 0, 0) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \mathbf{u}_{2,in} &= (300, 300, 300) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ T_{1,in} &= 100 \text{ K}, \\ T_{2,in} &= 300 \text{ K}, \\ T_{surf} &= 500 \text{ K}, \end{cases}$$

et les paramètres numériques égaux à

$$\begin{cases} \Delta t &= 1 \cdot 10^{-7} \text{ s}, \\ N_2 &= 5 \cdot 10^4, \\ N_1 &= 5 \cdot 10^2. \end{cases}$$

Évolution des vitesses macroscopiques dans le cas du système (A)

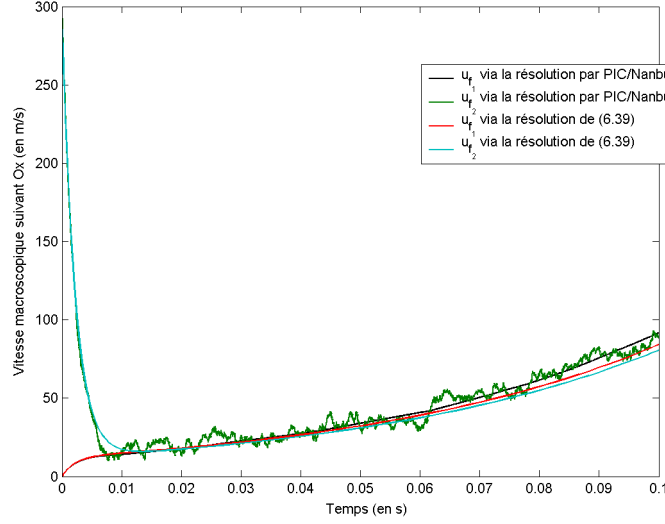


FIG. 6.4 – Comparaison entre les vitesses macroscopiques déduites du système (A) obtenues par la méthode PIC/Nanbu et les solutions du système (6.41).

On montre, de façon formelle, que les vitesses macroscopiques \mathbf{u}_{f_1} et \mathbf{u}_{f_2} déduites du système (A) sont solutions du système

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}_{f_1}}{dt} = 4\pi\varepsilon C_m n_2 \mathbf{u}_{f_2}, \\ \frac{d\mathbf{u}_{f_2}}{dt} = \frac{4\pi}{1+\varepsilon} C_m n_1 (\mathbf{u}_{f_1} - \mathbf{u}_{f_2}). \end{cases} \quad (6.41)$$

Nous présentons sur la figure 6.4 les vitesses macroscopiques obtenues via la résolution numérique des systèmes (A) et (6.41) pour les valeurs physiques suivantes :

$$\begin{cases} r_p &= 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}, \\ n_1 &= 10^{14} \text{ m}^{-3}, \\ n_2 &= 10^{21} \text{ m}^{-3}, \end{cases}$$

Les densités initiales $f_{1,in}$ et $f_{2,in}$ sont données par (6.37) et (6.38), avec

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{1,in} &= (0, 0, 0) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ \mathbf{u}_{2,in} &= (300, 300, 300) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ T_{1,in} &= 100 \text{ K}, \\ T_{2,in} &= 300 \text{ K}, \\ T_{surf} &= 500 \text{ K}, \end{cases}$$

et les paramètres numériques égaux à

$$\begin{cases} \Delta t &= 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}, \\ N_2 &= 5 \cdot 10^3, \\ N_1 &= 5 \cdot 10^2. \end{cases}$$

6.2.4 Conclusion

Nous retirons de l'étude numérique des différents modèles les conclusions suivantes.

- ▷ Les figures 6.1 et 6.3 montrent que l'évolution des vitesses macroscopiques des espèces dans le cas spatialement homogène est similaire pour les systèmes V/B (6.2)–(6.4) avec $\Upsilon = \Upsilon_b$ et B/B (6.3)–(6.4). Le modèle avec section pseudo-maxwellienne met en évidence cette propriété grâce à l'évolution théorique des vitesses. Nous considérerons alors que ces modèles sont équivalents du point de vue de l'évolution des vitesses macroscopiques, qui est l'une des grandeurs importantes dans l'étude de la mobilisation et du transport de particules de poussière en cas d'accident de perte de vide.
- ▷ De plus, la résolution numérique du modèle composé des équations (6.2)–(6.4) avec $\Upsilon = \Upsilon_b$ [par couplage entre une méthode de type PIC pour l'équation (6.2)] est plus rapide que la résolution numérique du modèle composé des équations (6.3)–(6.4) avec une méthode de Nanbu. Elle permet en effet de s'affranchir de la simulation de l'opérateur R_1 , qui, comme nous l'avons montré au Chapitre 3, peut se révéler très coûteuse. De plus, alors que le coût de cette dernière augmente avec la taille des particules de poussière, le coût de la méthode PIC ne dépend lui pas directement de la taille de celles-ci, mais seulement des nombres de particules et molécules numériques N_{1c} et N_{2c} dans chaque maille (autrement dit, des représentativités ω_1 et ω_2 choisies et des densités locales n_{1c} et n_{2c} dans chaque maille). Enfin, la méthode de simulation de l'équation (6.2) étant déterministe, les résultats numériques donnant l'évolution de la vitesse macroscopique des particules de poussière présentent moins de fluctuation comparativement aux résultats obtenus avec la méthode de Nanbu (les fluctuations résiduelles viennent du couplage de (6.2) avec (6.4)).
- ▷ Le modèle composé des équations V/B (6.2)–(6.4) avec $\Upsilon = \Upsilon_a$ est encore plus rapide à simuler. En effet, le terme d'accélération $\Upsilon_{a,sd}^{c,n}$ (ou $\Upsilon_{a,m}^{c,n}$) est identique pour toutes les particules de poussière numériques, et n'est donc calculé qu'une fois dans chaque cellule, à chaque pas de temps. Cependant, les vitesses macroscopiques des espèces ne sont proches de celles du système (6.3)–(6.4) que sur un certain intervalle de temps (dépendant des paramètres physiques du système). L'évolution de celles-ci diffère ensuite, comme le met notamment en évidence le modèle à section pseudo-maxwellienne. Ce modèle n'est donc utilisable que sur des temps assez courts. Le temps typique de la mobilisation et du transport de particules de poussière lors de la simulation d'un accident de perte de vide étant lui aussi assez bref, l'utilisation de ce modèle n'est donc pas à exclure.

6.3 Étude du transport de particules de poussière dans un scénario d'accident de perte de vide

Nous présentons ici des simulations numériques avec visualisation en 3 dimensions du transport de particules de poussière lors d'un scénario d'accident de perte de vide. Nous utilisons pour cela les modèles B/B (6.3)–(6.4) ou V/B (6.2)–(6.4) précédemment décrits, dans lesquels nous ajoutons la force de gravité s'exerçant sur les particules de poussière. Nous considérons une boîte au fond de laquelle reposent des particules de poussière. Celles-ci sont uniformément réparties dans les mailles adjacentes à la surface représentant le fond de la boîte. Nous supposons dans cette partie que les particules de poussière ne subissent pas d'interaction avec la paroi lors de leur mobilisation. Une arrivée d'air (composé de molécules d'azote) sur l'une des parois entraîne une augmentation de la densité en molécules à l'intérieur de la boîte. Afin de s'affranchir de l'augmentation du temps de calcul lié à l'augmentation de la densité, nous considérons tout d'abord le cas où l'un des côtés est muni d'une condition d'absorption.

6.3.1 Boîte ouverte

Nous considérons dans cet exemple un cube de 1 cm de côté. Les conditions aux limites sur les côtés de ce cube sont des conditions de réflexion diffuse, excepté sur le côté supérieur (muni d'une condition d'absorption) et sur un carré de $5 \cdot 10^{-4}$ m de côté (par lequel sont émises des molécules de gaz) (*cf.* figure 6.5).

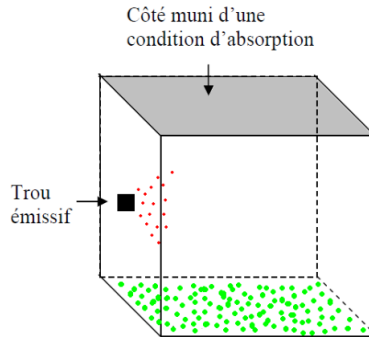


FIG. 6.5 – Schéma du cube ouvert.

Le cube est découpé en 8000 mailles gérées par 64 processeurs. Les particules de poussière, de diamètre $0,1 \mu\text{m}$, sont réparties dans les 400 mailles inférieures, avec une densité de $n_1 = 10^{15} \text{ m}^{-3}$ dans ces mailles (et nulle ailleurs). La densité en molécules est initialement nulle à l'intérieur du cube. La densité de la source de molécules est de $n_2 = 10^{21} \text{ m}^{-3}$, et les molécules sont émises selon une maxwellienne avec une vitesse macroscopique de $300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans la direction perpendiculaire au trou. Pour les détails pratiques de gestion des conditions aux limites, nous renvoyons à [Ro].

La figure 6.6 présente la simulation du déplacement des particules grâce au modèle Boltzmann/Boltzmann (6.3)–(6.4). Le temps simulé est de 45 ms pour un temps de simulation de 24h. Nous représentons ici les particules de poussière par des sphères vertes, et les molécules par des points rouges.

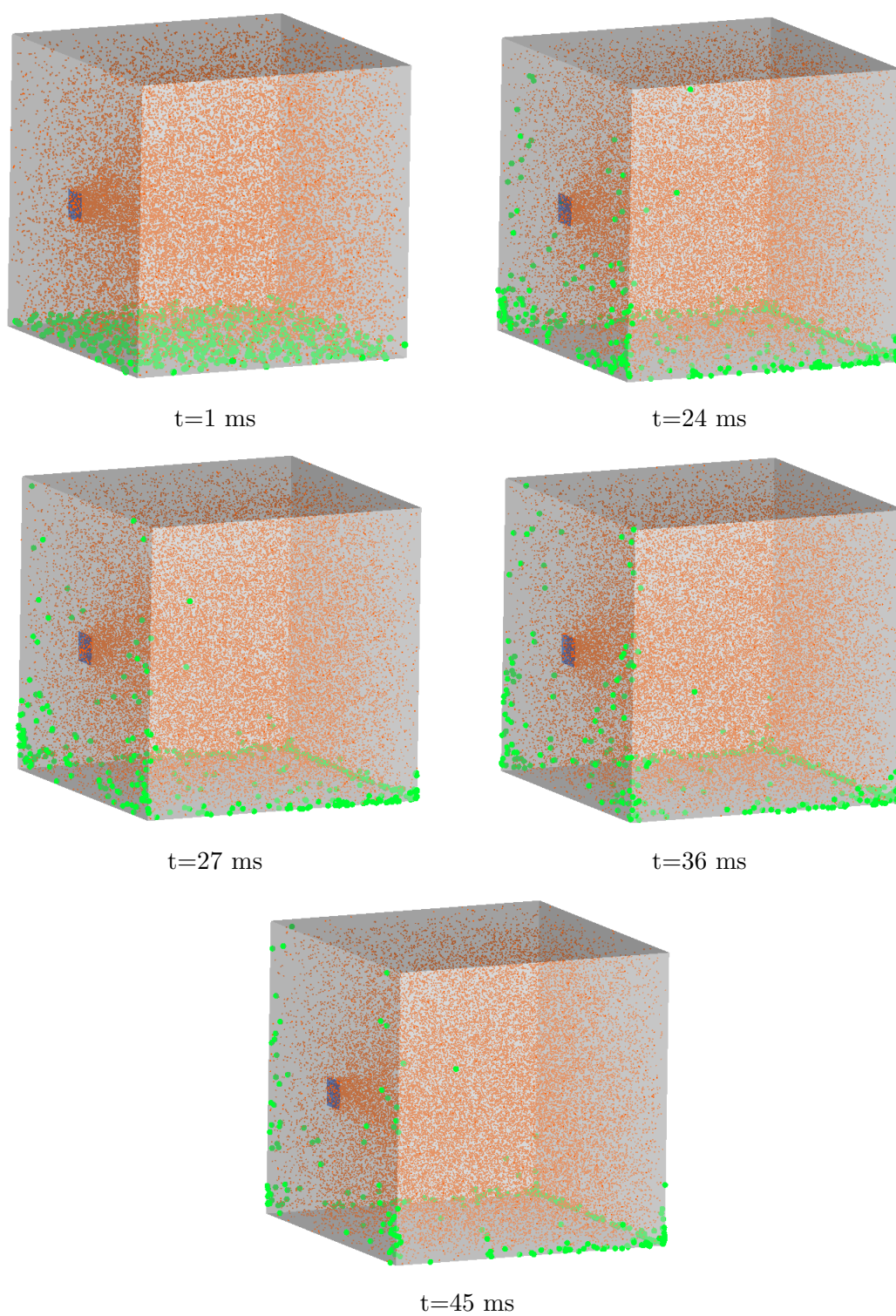


FIG. 6.6 – Scénario d'accident de perte de vide dans un cube ouvert, avec le modèle Boltzmann/Boltzmann.

La figure 6.7 présente la simulation du déplacement des particules grâce au modèle Vlasov/Boltzmann (6.2)–(6.4) avec Υ_b et un coefficient $n_{\Delta t} = 100$. Le nombre initial de particules de poussière numériques représentées est plus important que pour le cas-test de la figure 6.6. Le temps simulé est ici de 247 ms, pour un temps de simulation de 24h. Les molécules de gaz ne sont pas représentées visuellement dans cette simulation.

6.3.2 Boîte fermée

La parallélisation du code nous a ensuite permis d'envisager le cas d'une boîte fermée, dans laquelle la densité en molécules augmente au fur et à mesure que l'air entre. Les particules de poussière sont comme précédemment initialement réparties dans les mailles inférieures, avec une densité de $n_1 = 10^{15} \text{ m}^{-3}$. Le diamètre de celles-ci est de $0,1 \mu \text{ m}$. Ces essais suivants ont été réalisés durant le stage au LSET de Pierre Barthelet, étudiant à l'école Supélec, entre Juin et Août 2008.

La figure 6.8 présente le cas d'un cube de 10 cm de côté. La densité de la source est de $n_2 = 2,45 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$. La densité initiale en molécules est nulle, et atteint en moyenne $6 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$ après 3,15 ms. Le calcul est effectué sur 500 processeurs pendant 24 h.

La figure 6.9 présente une simulation d'accident de perte de vide avec le modèle Vlasov/Boltzmann et une géométrie un peu plus complexe en cylindre torique. Cette géométrie est similaire à celle utilisée dans les simulations numériques effectuées par Takase dans [Ta] (les dimensions ne sont cependant pas tout-à-fait identiques). Le cylindre a une hauteur de 10 cm, des rayons intérieur et extérieur de 2,5 cm et 5 cm respectivement, pour un volume total de $5,89 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$. Le maillage est ici plus élaboré : celui-ci est réalisé en découpant la hauteur du cylindre en 30 secteurs et la base en 60 secteurs angulaires et 8 secteurs suivant le rayon (soit 14400 mailles au total). Le calcul est effectué sur 480 processeurs pendant 24 heures. Les molécules de gaz ne sont pas représentées visuellement dans cette simulation.

Dans ces exemples, le coût du calcul des collisions entre molécules devient rapidement prédominant sur les autres types de collision. L'intérêt du modèle asymptotique sur le modèle Boltzmann/Boltzmann est alors moindre que dans les exemples de la section 6.3.1 ; il nous permet cependant de diviser le temps de calcul par un facteur 3 environ.

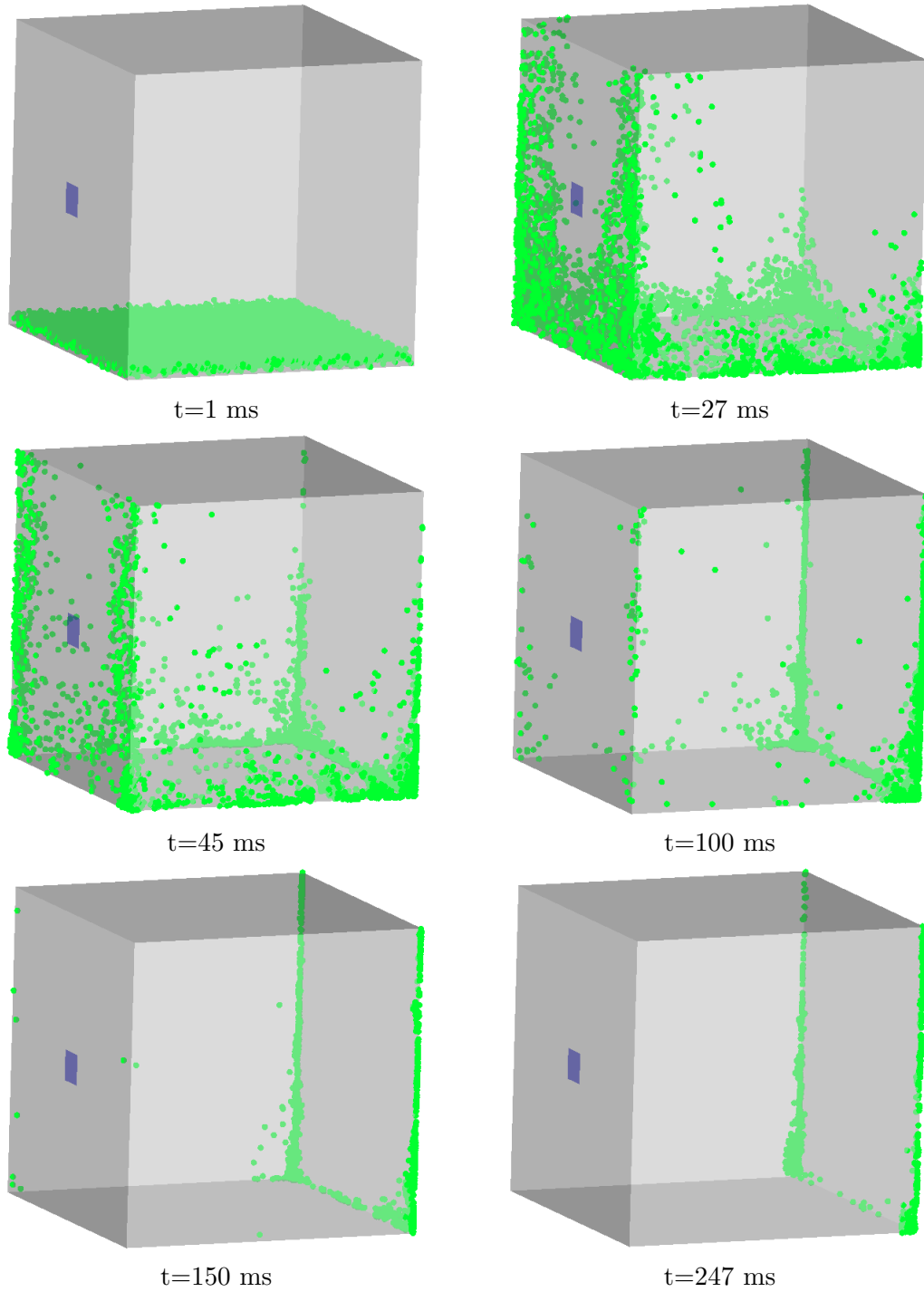


FIG. 6.7 – Scénario d'accident de perte de vide dans un cube ouvert, avec le modèle Vlasov/Boltzmann où $\Upsilon = \Upsilon_b$.

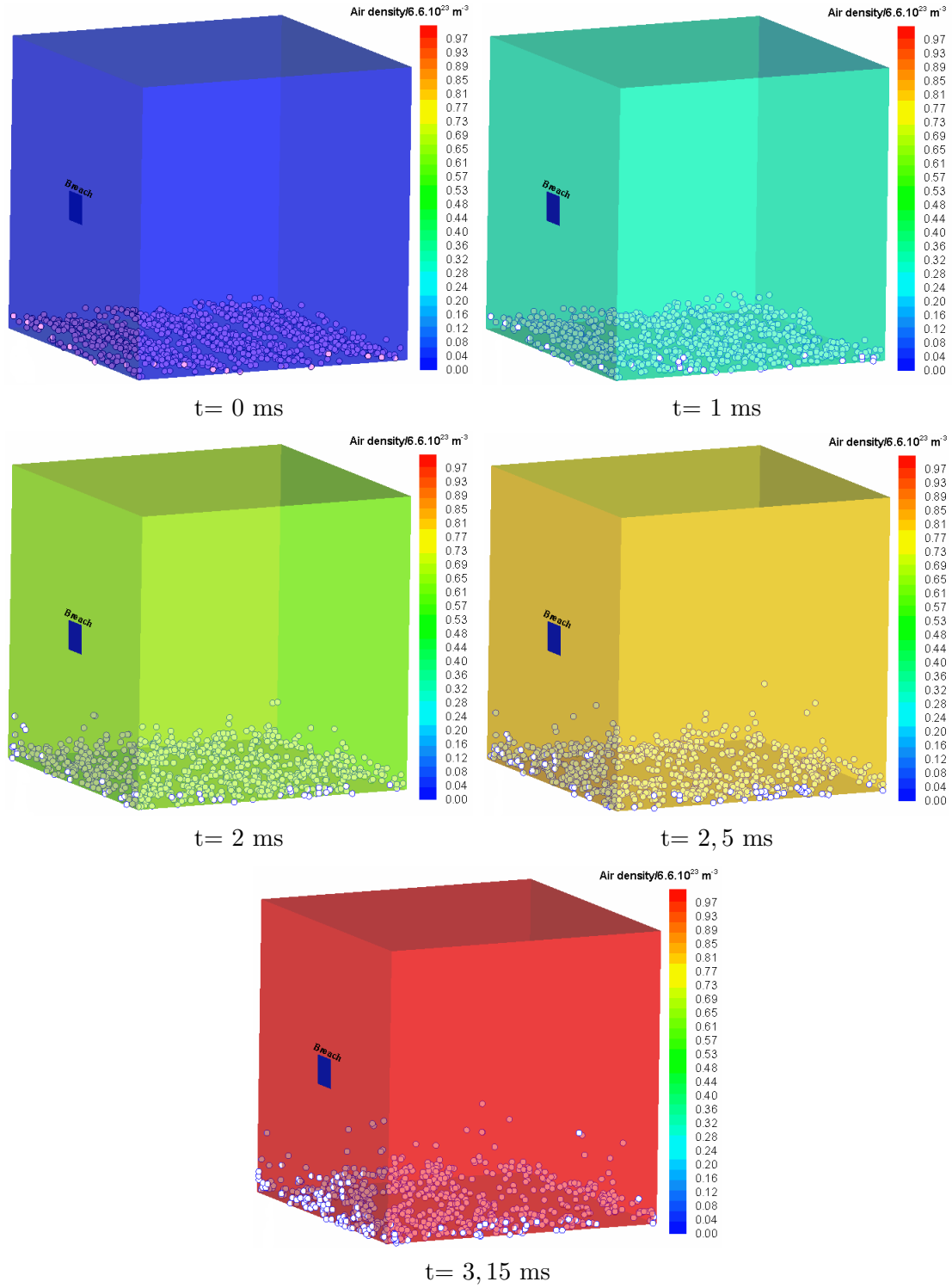


FIG. 6.8 – Scénario d'accident de perte de vide dans un cube fermé, avec le modèle Vlasov/Boltzmann où $\Upsilon = \Upsilon_b$.

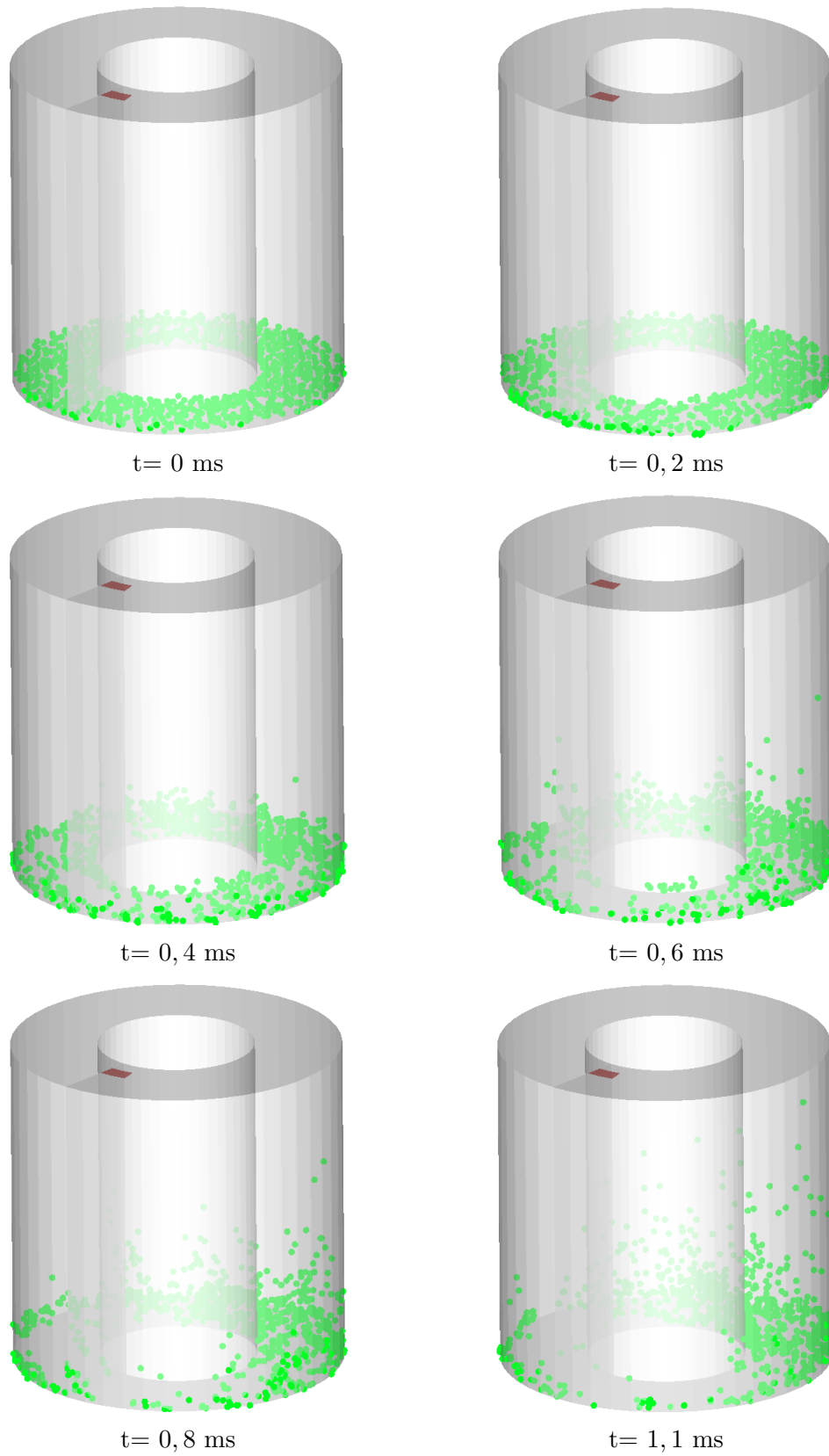


FIG. 6.9 – Scénario d'accident de perte de vide dans une boîte de géométrie en cylindre torique, avec le modèle Vlasov/Boltzmann où $\Upsilon = \Upsilon_b$.

6.4 Modèle de mobilisation des particules de poussière sur les parois

Nous présentons dans cette section une modélisation de la mobilisation des particules de poussière sur les parois. Ce modèle nous permettra d'étudier le décollement des particules adhérentes aux parois. Il pourrait être notamment intéressant de confronter les résultats obtenus avec ceux de Breitung, Travis et Xu [XT] avec le code GASFLOW (basé sur une description lagrangienne des particules et un modèle fluide pour le gaz) dans le contexte d'ITER.

Nous utilisons pour cela le modèle décrivant le transport des particules de type Vlasov/Boltzmann, dans lequel la densité f_1 vérifie l'équation :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \nabla_x f_1 + \operatorname{div}_v \left[f_1 \left(\Upsilon_{e, sd}(f_2) + \frac{\mathbf{P}}{m_1(r_p)} \right) \right] = 0,$$

où $\Upsilon_{e, sd}(f_2)$ est donné par (6.16), $m_1(r_p)$ est la masse des particules et \mathbf{P} le poids exercé sur celles-ci. On peut assimiler l'effet du gaz sur les particules à une force de traînée, donnée par

$$\mathbf{F}_d(t, x, v_1) = m_1(r_p) \Upsilon_{e, sd}(f_2)(t, x, v_1).$$

Dans notre modèle de mobilisation, nous supposons qu'une particule de poussière reposant sur la paroi (supposée horizontale) est soumise, en plus de la force de traînée \mathbf{F}_d et du poids \mathbf{P} , à une force adhésive $\mathbf{F}_{adhesive}$ normale à la paroi. De plus, nous supposons que la vitesse de celle-ci est nulle avant qu'elle ne soit mobilisée. Dans ce cas, la force de traînée \mathbf{F}_d a pour expression

$$\mathbf{F}_d(t, x, 0) = m_2 \pi r_p^2 \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) \left[|v_2| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] v_2 dv_2.$$

Remarque 6.2 On trouve alors la même expression qu'en définissant la force de traînée à partir du terme $\Upsilon_{a, sd}(f_2)$ défini par (6.14).

À l'instant t et à la position x , on décompose la force de traînée $\mathbf{F}_d(t, x, 0)$ en $\mathbf{F}_d = \mathbf{F}_{dx} + \mathbf{F}_{dy}$, où \mathbf{F}_{dy} est normale à la paroi, et on se place dans le repère $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ donné par

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{F}_{dx}}{|\mathbf{F}_{dx}|}, \quad \mathbf{j} = -\frac{\mathbf{F}_{adhesive}}{|\mathbf{F}_{adhesive}|}.$$

On note F_{dx} , F_{dy} , $F_{adhesive}$, les valeurs algébriques des forces correspondantes dans le repère $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ (F_{dy} est de signe quelconque, tandis que $F_{adhesive} < 0$ et $F_{dx} > 0$). Soient R_x et R_y les composantes de la force de réaction exercée par la paroi sur la particule suivant \mathbf{i} et \mathbf{j} , et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x \mathbf{i} + \mathcal{F}_y \mathbf{j}$ la résultante des forces exercées sur celle-ci.

- ▷ Si $F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g \leq 0$, alors la particule de poussière exerce une force sur la paroi ; la force de réaction normale R_y est donc égale à l'opposé de ce terme, et la résultante verticale des forces \mathcal{F}_y est nulle. Il n'y a donc pas de mouvement vertical. De plus, il existe dans ce cas une force de friction qui est la composante horizontale R_x de la force de réaction de la paroi, et qui s'oppose au mouvement horizontal de la molécule. Cette force de friction est une force à seuil. On distingue donc deux cas :

- si $F_{dx} \leq f_s |F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g|$, c'est-à-dire ici si

$$F_{dx} \leq -f_s (F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g),$$

où $f_s \in [0, 1]$ est le coefficient de friction, alors la friction est plus importante que la force de traînée horizontale : il n'y a donc pas de mouvement horizontal, autrement dit $\mathcal{F}_x = 0$ et donc $R_x = -F_{dx}$.

- si $F_{dx} \geq -f_s (F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g)$, alors la force de traînée horizontale est plus importante que la force de friction, et

$$R_x = f_s (F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g).$$

Il y a donc un mouvement de glissement horizontal, et

$$\mathcal{F}_x = F_{dx} + f_s (F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g) \geq 0.$$

- ▷ Si $F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g \geq 0$, alors la particule de poussière est soulevée. Par conséquent, la réaction de la paroi est nulle :

$$R_x = R_y = 0.$$

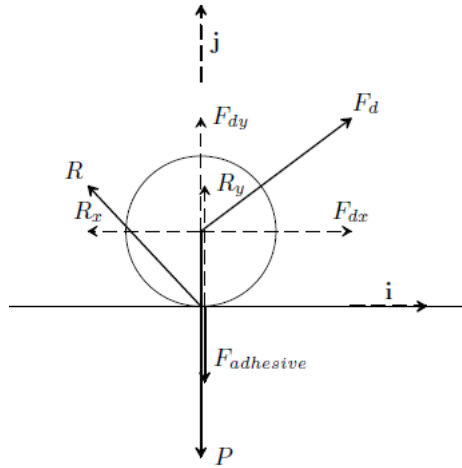
En considérant qu'une fois décollée la particule de poussière ne subit plus l'influence de la force adhésive, celle-ci est alors uniquement soumise à

$$\mathcal{F} = \mathbf{F}_d + \mathbf{P}.$$

Remarquons que dans ce cas, on a nécessairement

$$F_{dx} \geq -f_s (F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g),$$

puisque $F_{dx} \geq 0$.



En résumé : la particule de poussière est mobilisée si et seulement si

$$F_{dx} \geq -f_s (F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g).$$

Dans le cas où elle est mobilisée :

- ▷ si $F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g \leq 0$, alors la particule glisse et la résultante des forces exercées sur celle-ci est

$$\mathcal{F} = (F_{dx} + f_s (F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g)) \mathbf{i};$$

- ▷ si $F_{dy} + F_{adhesive} - m_1(r_p)g > 0$, alors la particule décolle et la résultante des forces exercées sur celle-ci est

$$\mathcal{F} = \mathbf{F}_d + \mathbf{P}.$$

Nous pouvons en déduire l'algorithme 1.

Remarque 6.3 Dans le cas où les particules de poussière n'ont pas toutes le même rayon, l'algorithme s'en trouve légèrement modifié. En effet, le terme $\Upsilon_{e,sd}$ dépend du rayon r des particules. Par conséquent, la force de traînée \mathbf{F}_d n'est plus identique pour toutes les particules de la cellule c .

Force adhésive. Z. Xu, J.R Travis et W. Breitung [XT] proposent la formule suivante

$$\mathbf{F}_{adhesive} = -\frac{A d_p}{12 z_0^2} \left(1 + \frac{A^2 K^2 d_p}{108 z_0^7} \right) \mathbf{j},$$

où $d_p = 2r_p$ est le diamètre des poussières, z_0 la distance de séparation à l'équilibre entre la poussière et la surface ($z_0 = r_p$ dans notre modèle), A un nombre aléatoire entre 0 et 1, K une constante empirique.

Coefficient de friction f_s . Pour un contact acier/acier par exemple, sa valeur est estimée à $f_s \approx 0,2$.

Algorithme 1 Modèle de mobilisation et de transport des particules de poussière.

À chaque temps t^n , et dans chaque cellule c adjacente à la paroi inférieure :

▷ On calcule l'approximation \mathbf{F}_d^n de $\mathbf{F}_d(t^n, x, 0)$ dans la cellule c

- $\mathbf{F}_d^n = 0$
- pour $i = 1$ à N_{2c} :

$$\mathbf{F}_d^n = \mathbf{F}_d^n + V_2^{i,n} \left[|V_2^{i,n}| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right];$$

- $\mathbf{F}_d^n = m_2 \pi r_p^2 \frac{\omega_2}{V_c} \mathbf{F}_d^n$;
- on décompose \mathbf{F}_d^n en $\mathbf{F}_d^n = F_{dx}^n \mathbf{i} + F_{dy}^n \mathbf{j}$, où \mathbf{j} est le vecteur normal à la paroi.

▷ Pour $k = 1$ à N_{1c} :

- si la particule indicée par k est située sur la paroi (c.à.d si la coordonnée suivant z de la position $X_1^{k,n}$ est nulle), alors on détermine si celle-ci est mobilisée et on modifie le cas échéant sa vitesse :
 - si $F_{dx}^n < -f_s (F_{dy}^n + F_{adhesive} - m_1(r_p)g)$, alors il n'y a pas de mobilisation de la particule numérique

$$V_1^{k,n+1} = 0;$$

- sinon, il y a mobilisation et
 - * si $F_{dy}^n + F_{adhesive} - m_1(r_p)g > 0$, alors la particule décolle

$$V_1^{k,n+1} = \Delta t \left(\frac{1}{m_1(r_p)} \mathbf{F}_d^n - g \mathbf{j} \right);$$

- * si $F_{dy}^n + F_{adhesive} - m_1(r_p)g \leq 0$, alors la particule roule

$$V_1^{k,n+1} = \frac{\Delta t}{m_1(r_p)} \left(F_{dx}^n + f_s (F_{dy}^n + F_{adhesive} - m_1(r_p)g) \right) \mathbf{i}.$$

- sinon :
 - on calcule l'approximation $\mathbf{F}_d^{n,k}$ de $\mathbf{F}_d(t^n, x, V_1^{k,n})$ dans la cellule c :
 - * $\mathbf{F}_d^{n,k} = 0$,
 - * pour $i = 1$ à N_{2c} :

$$\mathbf{F}_d^{n,k} = \mathbf{F}_d^{n,k} + (V_2^{i,n} - V_1^{k,n}) \left[|V_2^{i,n} - V_1^{k,n}| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right],$$

$$* \mathbf{F}_d^{n,k} = m_2 \pi r_p^2 \frac{\omega_2}{V_c} \mathbf{F}_d^{n,k}.$$

- on modifie la vitesse de la particule

$$V_1^{k,n+1} = V_1^{k,n} + \Delta t \left(\frac{1}{m_1(r_p)} \mathbf{F}_d^{n,k} - g \right).$$

Annexes

Annexe A. Rappel de quelques grandeurs physiques utilisées

Sections de collision

Nous précisons ici les notions de sections efficace de collision et section totale de collision. Considérons une collision entre une particule appelée α (de position C_α , de vitesse v_α et de rayon r_α) et une particule appelée β (de position C_β , de vitesse v_β et de rayon r_β), c'est-à-dire une déviation des trajectoires des particules durant un bref intervalle de temps. On peut associer à cette collision deux paramètres d'impact p et ϵ : p est défini comme la distance entre les trajectoires incidentes des deux particules, et ϵ est l'angle entre un plan de référence et le plan défini par $(C_\alpha, \overrightarrow{C_\alpha C_\beta}, v_\alpha - v_\beta)$. La **section efficace de collision** $\varsigma_{\alpha,\beta}$ est alors définie par

$$\varsigma_{\alpha,\beta} d\Omega = p dp d\epsilon, \quad (6.42)$$

où $d\Omega$ est l'angle solide autour de la vitesse relative post-collisionnelle. Dans le cas où les collisions sont planes (c'est le cas des collisions élastiques), on peut définir un angle de déviation χ (qui est l'angle formé entre les vitesses relatives pré- et post-collisionnelles) et relier celui-ci à l'angle solide $d\Omega$: on a $d\Omega = \sin(\chi) d\chi d\epsilon$. On obtient alors la relation suivante :

$$\varsigma_{\alpha,\beta} = \frac{p}{\sin(\chi)} \left| \frac{dp}{d\chi} \right|.$$

La **section totale de collision** est définie ensuite par

$$\Sigma_{\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{S}^2} \varsigma_{\alpha,\beta} d\Omega.$$

Dans le cas particulier d'un mécanisme collisionnel de sphère dures, on notera ces sections respectivement $\varsigma_{\alpha,\beta}^{sd}$ et $\Sigma_{\alpha,\beta}^{sd}$; on peut montrer (cf. [Bi4]) que celles-ci sont égales à

$$\varsigma_{\alpha,\beta}^{sd} = \frac{(r_\alpha + r_\beta)^2}{4},$$

et

$$\Sigma_{\alpha,\beta}^{sd} = \pi(r_\alpha + r_\beta)^2.$$

Dans le cas du système gaz-poussière, on introduit

- ▷ la section de collision de sphères dures entre deux particules de poussière de rayons r_i et r_j , donnée par

$$\Sigma_{1,1}^{sd}(r_i, r_j) = \pi(r_i + r_j)^2. \quad (6.43)$$

Dans le cas où les rayons des particules sont du même ordre de grandeur (ou sont tous égaux), on appellera

$$\Sigma_{1,1}^{sd} = 4\pi(r_{min})^2,$$

l'ordre de grandeur de cette section de collision.

- ▷ la section de collision de sphères dures entre une particule de poussière de rayon r et une molécule (ou entre molécule et particule de poussière), donnée par

$$\Sigma_{1,2}^{sd}(r) = \pi(r + \varrho)^2. \quad (6.44)$$

Dans le cas où les rayons des particules sont du même ordre de grandeur (ou sont tous égaux), et en tenant compte de l'hypothèse $\varrho \ll r_{min}$, on appellera

$$\Sigma_{1,2}^{sd} = \pi(r_{min})^2,$$

l'ordre de grandeur de cette section de collision.

- ▷ la section de collision de sphères dures entre molécules de gaz, donnée par

$$\Sigma_{2,2}^{sd} = 4\pi\varrho^2. \quad (6.45)$$

Remarque 6.4 Notons que la section efficace $\varsigma_{\alpha,\beta}$ est reliée au noyau de collision q (avec la paramétrisation dite en σ) du terme de perte d'un opérateur décrivant les collisions entre les particules α et les particules β , par la relation

$$q = \varsigma_{\alpha,\beta} |v_\alpha - v_\beta|.$$

Dans le cas de collisions élastiques, le noyau de collision du terme de gain de l'opérateur est égal à celui du terme de perte. Cependant, lorsque les collisions ne sont pas microréversibles (comme dans le modèle de réflexion diffuse donné par les opérateurs R_1^d et R_2^d établis au Chapitre 1), ce n'est pas le cas.

Vitesses moyennes et vitesses relatives moyennes

Les vitesses moyennes et vitesses relatives moyennes des molécules et particules de poussière utilisées tout au long de notre travail sont évaluées à partir de celles d'un gaz à l'équilibre. Nous rappelons ici la définition de ces quantités.

Remarque 6.5 Les vecteurs vitesses sont ici notés sous la forme \vec{v} pour éviter toute ambiguïté et confusion avec les modules des vitesses.

Vitesses moyennes

La vitesse moyenne d'une distribution en particules (molécules ou particules de poussière) est définie à partir de la fonction de distribution ψ des modules des vitesses par

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v \psi(v) dv,$$

la fonction ψ étant reliée à la distribution en vitesse F par

$$\psi(v)dv = \int_{\mathbb{S}^2} F(\vec{v})v^2 dv d\Omega.$$

Dans le cas où la distribution en vitesse F est une maxwellienne à la température cinétique T , c'est-à-dire

$$F(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m|\vec{v}|^2}{2k_B T}\right),$$

où m est la masse des particules, on peut montrer qu'alors

$$\langle v \rangle = \left(\frac{8k_B T}{\pi m}\right)^{1/2}. \quad (6.46)$$

Nous choisissons alors dans ce travail d'estimer les vitesses moyennes des particules de poussière et des molécules à partir de la relation (6.46). On pose donc

$$\langle v_2 \rangle = \left(\frac{8k_B T^\circ}{\pi m_2}\right)^{1/2}$$

comme ordre de grandeur de la vitesse moyenne des molécules de gaz, et, lorsque les rayons des particules de poussières sont du même ordre de grandeur (ou identiques),

$$\langle v_1 \rangle = \left(\frac{8k_B T^\circ}{\pi m_1(r_{min})}\right)^{1/2}$$

comme ordre de grandeur de la vitesse moyenne des particules de poussière.

Vitesses relatives moyennes

Si l'on considère un mélange composé de deux espèces dont les distributions en vitesse sont notés F_α et F_β , la vitesse relative moyenne $\langle v_{\alpha,\beta}^{rel} \rangle$ est définie par

$$\langle v_{\alpha,\beta}^{rel} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| F_\alpha(\vec{v}_1) F_\beta(\vec{v}_2) d\vec{v}_1 d\vec{v}_2.$$

Dans le cas où les distributions en vitesses F_α et F_β sont des maxwelliennes à la même température cinétique T , c'est-à-dire

$$F_i(\vec{v}) = \left(\frac{m_i}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_i|\vec{v}|^2}{2k_B T}\right),$$

alors on peut montrer que la vitesse relative moyenne est égale à

$$\langle v_{\alpha,\beta}^{rel} \rangle = \left[\frac{8k_B T}{\pi} \left(\frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{m_\beta} \right) \right]^{1/2}. \quad (6.47)$$

En particulier, si les espèces sont identiques, alors

$$\langle v_\alpha^{rel} \rangle = \sqrt{2} \langle v_\alpha \rangle,$$

où $\langle v_\alpha \rangle$ est la vitesse moyenne de l'espèce α . On choisit dans ce travail d'estimer les vitesses relatives moyennes intervenant dans le système gaz-poussière à partir de la relation (6.47). On pose donc

$$\langle v_{1,1}^{rel}(r_i, r_j) \rangle = \left[\frac{8k_B T^\circ}{\pi} \left(\frac{1}{m_1(r_i)} + \frac{1}{m_1(r_j)} \right) \right]^{1/2} \quad (6.48)$$

pour la vitesse relative moyenne entre deux particules de rayons r_i et r_j ,

$$\langle v_{1,2}^{rel}(r) \rangle = \left[\frac{8k_B T^\circ}{\pi} \left(\frac{1}{m_1(r)} + \frac{1}{m_2} \right) \right]^{1/2} \quad (6.49)$$

pour la vitesse relative moyenne entre une particule de poussière de rayon r et une molécule, et

$$\langle v_{2,2}^{rel} \rangle = \sqrt{2} \langle v_2 \rangle = \sqrt{2} \left(\frac{8k_B T^\circ}{\pi m_2} \right)^{1/2} \quad (6.50)$$

pour la vitesse relative entre deux molécules.

Annexe B. Noyau de réflexion diffuse $K(u \rightarrow v, x, t)$

On se propose ici de justifier l'expression du noyau de réflexion diffuse

$$K(u \rightarrow v, x, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{k_B T} \right)^2 (n(x) \cdot v) \exp \left(\frac{-mv^2}{2k_B T} \right) \mathbb{1}_{\{n(x) \cdot v > 0\}},$$

introduite en (28). Cette densité de probabilité, qui ne dépend pas des variables u et t , et ne dépend de la variable x qu'à travers le vecteur n , sera encore notée $h_n(v)$.

Pour cela, on suppose que les molécules réfléchies sur la surface $\partial\Omega$ de vecteur normal n (dirigé vers le demi-espace d'où proviennent les molécules) proviennent d'un réservoir virtuel de gaz (de densité notée n_0) à l'équilibre thermodynamique (de température T) situé derrière la surface $\partial\Omega$. De plus, on suppose le temps de collision τ négligeable.

On se place dans un repère orthonormal (O, n, j, k) , et on note (v_1, v_2, v_3) les coordonnées de la vitesse post-collisionnelle v de la molécule dans ce repère. Par hypothèse, la fonction de distribution des vitesses des molécules du réservoir virtuel est celle d'un gaz à l'équilibre, c'est-à-dire

$$f(v) = F(v_1, v_2, v_3) = \Psi(v_1)\Psi(v_2)\Psi(v_3),$$

avec

$$\Psi(v_i) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{mv_i^2}{2k_B T} \right),$$

m étant la masse d'une molécule du gaz. Ainsi le nombre de molécules du réservoir ayant une vitesse dans la classe $[v, v + dv]$ est donné par :

$$dn = n_0 f(v) dv = n_0 F(v_1, v_2, v_3) dv_1 dv_2 dv_3.$$

Le flux $d\Phi$ de molécules ayant une vitesse dans la classe $[v, v + dv]$ émis par le réservoir au niveau de la paroi est égal à :

$$\begin{aligned} d\Phi &= (v \cdot n) dn = n_0 v_1 \Psi(v_1) \Psi(v_2) \Psi(v_3) dv_1 dv_2 dv_3 \quad \text{si } n \cdot v > 0, \\ &= 0 \quad \text{si } n \cdot v \leq 0, \end{aligned}$$

et le flux total émissif est donc :

$$\Phi = n_0 \int_0^{+\infty} v_1 \Psi(v_1) dv_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(v_2) dv_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(v_3) dv_3.$$

Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(w) dw = 1$, et que

$$\int_0^{+\infty} v_1 \Psi(v_1) dv_1 = \left(\frac{k_B T}{2\pi m} \right)^{\frac{1}{2}},$$

on a alors

$$\Phi = n_0 \left(\frac{k_B T}{2\pi m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalement, comme la probabilité $H(v_1, v_2, v_3)$ pour que la vitesse d'une molécule émise appartienne à la classe $[v_1, v_1 + dv_1] \times [v_2, v_2 + dv_2] \times [v_3, v_3 + dv_3]$ est liée au flux émissif par la relation :

$$H(v_1, v_2, v_3) dv_1 dv_2 dv_3 = \frac{d\Phi}{\Phi},$$

on obtient alors

$$H(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{k_B T} \right)^2 v_1 \exp \left(-\frac{m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}{2k_B T} \right) \mathbb{1}_{\{v_1 > 0\}},$$

ou encore

$$h_n(v) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{k_B T} \right)^2 (v \cdot n) \exp \left(-\frac{m|v|^2}{2k_B T} \right) \mathbb{1}_{\{v \cdot n > 0\}}.$$

Annexe C. Quelques calculs d'intégrales

Nous justifions dans cette annexe quelques résultats utilisés. Soit $u \in \mathbb{R}^3$.

Calcul 1 : $\int_{\mathbb{S}^2} (n \cdot u) \mathbb{1}_{\{n \cdot u > 0\}} dn$.

On se place dans un repère orthonormé $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ tel que $\mathbf{i} = \frac{u}{|u|}$; le vecteur n a pour coordonnées sphériques dans ce repère $(\cos(\theta), \sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi))$, avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} (n \cdot u) \mathbb{1}_{\{n \cdot u > 0\}} dn &= |u| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (n \cdot \mathbf{i}) \mathbb{1}_{\{n \cdot \mathbf{i} > 0\}} \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ &= 2\pi |u| \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\mathbb{S}^2} (n \cdot u) \mathbb{1}_{\{n \cdot u > 0\}} dn = \pi |u|. \quad (6.51)$$

Calcul 2 : $\int_{\mathbb{S}^2} n(n \cdot u) \mathbb{1}_{\{n \cdot u > 0\}} dn$.

Dans le même repère que précédemment, on a cette fois

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{S}^2} n(n \cdot u) \mathbb{1}_{\{n \cdot u > 0\}} dn \\ &= |u| \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos(\theta) \mathbf{i} + \sin(\theta) \cos(\varphi) \mathbf{j} + \sin(\theta) \sin(\varphi) \mathbf{k}) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ &= 2\pi |u| \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta \right) \mathbf{i}, \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\mathbb{S}^2} n(n \cdot u) \mathbb{1}_{\{n \cdot u > 0\}} dn = \frac{2\pi}{3} u. \quad (6.52)$$

Calcul 3 : $\int_{\mathbb{S}^2} (u \cdot n) n dn$.

D'après (6.52), on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} (u \cdot n) n dn &= \int_{\mathbb{S}^2} (u \cdot n) n \mathbb{1}_{\{n \cdot u > 0\}} dn + \int_{\mathbb{S}^2} (u \cdot n) n \mathbb{1}_{\{n \cdot u < 0\}} dn \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} (u \cdot n) n \mathbb{1}_{\{n \cdot u > 0\}} dn - \int_{\mathbb{S}^2} (-u \cdot n) n \mathbb{1}_{\{n \cdot (-u) > 0\}} dn \\ &= \frac{2\pi}{3} u - \frac{2\pi}{3} (-u) = \frac{4\pi}{3} u. \end{aligned}$$

Calcul 4 : $\int_{\mathbb{S}^2} n(n \cdot u)^2 \mathbb{1}_{\{n \cdot u > 0\}} dn$.

En se plaçant toujours dans le même repère orthonormé $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ tel que $\mathbf{i} = \frac{u}{|u|}$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^2} n(n \cdot u)^2 \mathbb{1}_{\{n \cdot u > 0\}} dn \\ &= |u|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta) \cos(\varphi)\mathbf{j} + \sin(\theta) \sin(\varphi)\mathbf{k}) \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ &= 2\pi |u|^2 \left(\int_0^{\pi/2} \cos^3(\theta) \sin(\theta) d\theta \right) \mathbf{i}, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\mathbb{S}^2} n(n \cdot u)^2 \mathbb{1}_{\{n \cdot u > 0\}} dn = \frac{\pi}{2} |u| u. \quad (6.53)$$

Calcul 5 : $\int_{\mathbb{R}^3} u h_n(u) du$, pour $n \in \mathbb{S}^2$.

Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un repère orthonormé tel que $\mathbf{i} = n$, et $h_n(u) = \frac{2\beta^4}{\pi} (n \cdot u) \exp(-\beta^2 u^2) \mathbb{1}_{\{n \cdot u \geq 0\}}$.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} u h_n(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{2\beta^4}{\pi} u (n \cdot u) \exp(-\beta^2 u^2) \mathbb{1}_{\{n \cdot u > 0\}} du \\ &= \frac{2\beta^4}{\pi} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) x \exp(-\beta^2 x^2) \exp(-\beta^2 y^2) \exp(-\beta^2 z^2) dx dy dz \\ &= \frac{2\beta^4}{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\beta^2 y^2) dy \right)^2 \int_0^{+\infty} x^2 \exp(-\beta^2 x^2) dx \mathbf{i} = \frac{2\beta^4}{\pi} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \right)^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta^3} \mathbf{i}, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^3} u h_n(u) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} n. \quad (6.54)$$

Calcul 6 : $\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} u^2 h_n(u) du dn$.

Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un repère orthonormé tel que $\mathbf{i} = n$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} u^2 h_n(u) du &= \frac{2\beta^4}{\pi} \int_0^{+\infty} x^3 \exp(-\beta^2 x^2) dx \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} \exp(-\beta^2 y^2) dy \right)^2 \\ &\quad + \frac{4\beta^4}{\pi} \int_{\mathbb{R}^3} y^2 \exp(-\beta^2 y^2) dy \cdot \int_0^{+\infty} x \exp(-\beta^2 x^2) dx \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-\beta^2 z^2) dz \\ &= \frac{2\beta^4}{\pi} \cdot \frac{1}{2\beta^4} \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \right)^2 + \frac{4\beta^4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\beta^3} \cdot \frac{1}{2\beta^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}, \end{aligned}$$

et donc

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} u^2 h_n(u) du dn = \frac{8\pi}{\beta^2}.$$

Annexe D. Principe des méthodes particulières

Nous précisons ici le fondement des méthodes particulières utilisées dans les Chapitres 3 et 6. Cette présentation est inspirée de l'article de P. A. Raviart [Ra]. On considère le problème de Cauchy pour l'équation d'advection sous forme conservative :

$$(C) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{a}u) + a_0 u = f, & x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (6.55)$$

où $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Cette équation peut être résolue en utilisant la méthode des caractéristiques. En supposant que

$$a_i \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n, \quad (6.56)$$

où $0 < T < \infty$, on peut introduire les courbes caractéristiques associées à opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$: étant donné $x \in \mathbb{R}^d$ et $s \in [0, T]$, il existe une unique solution $t \mapsto X(t; x, s) \in [W^{1,\infty}(0, T)]^d$ au système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \mathbf{a}(t, X(t)), \\ X(s) = x. \end{cases}$$

Soit $T_{s,t} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ l'opérateur défini par

$$T_{s,t}(x) = X(t; x, s),$$

et J le jacobien de cette transformation, égal à

$$J(t; x, s) = \det \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(t; x, s) \right).$$

On introduit aussi L l'opérateur différentiel défini par

$$Lv = \frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div}_v(\mathbf{a}v) + a_0 v,$$

et L^* son adjoint formel :

$$L^*v = -\frac{\partial v}{\partial t} - \mathbf{a} \cdot \nabla v + a_0 v.$$

On peut alors montrer le lemme et le théorème suivants (nous renvoyons le lecteur à [Ra] pour une démonstration) :

Lemme 6.1 *Sous l'hypothèse (6.56), $t \mapsto J(t; \cdot, \cdot) \in C^0(0, T, L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, T)))$ et*

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t; x, s) = J(t; x, s) \operatorname{div}(\mathbf{a}).$$

Théorème 6.1 Soit $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$; on suppose, en plus de l'hypothèse (6.56), que $a_0 \in L^\infty_{loc}((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ et que $f \in L^1_{loc}((0, T) \times \mathbb{R}^d)$. Alors le problème (C) admet une unique solution faible $u \in L^1_{loc}((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ donnée par

$$\begin{aligned} u(t, x) = & u_0(T_{t,0}(x)) J(0; x, t) \exp \left(- \int_0^t a_0(s, T_{t,s}(x)) ds \right) \\ & + \int_0^t f(s, T_{t,s}(x)) J(s; x, t) \exp \left(- \int_s^t a_0(\sigma, T_{t,\sigma}(x)) d\sigma \right) ds. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Par solution faible, on entend ici une solution $u \in L^1_{loc}((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) (L^* \varphi)(t, x) dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) \varphi(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \varphi(0, x) dx,$$

pour tout fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0, T[\times \mathbb{R}^d)$.

Intéressons nous maintenant aux solutions de (C) dans l'espace des mesures de Radon $M((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ sur \mathbb{R}^d (c'est-à-dire les formes linéaires continues sur $\mathcal{C}_c([0, T[\times \mathbb{R}^d)$). On définit ces solutions de la façon suivante :

Définition 6.1 Soit $u_0 \in M(\mathbb{R}^d)$. On dira qu'une mesure $u \in M((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ est solution de (C) si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0, T[\times \mathbb{R}^d)$,

$$\langle u, L^* \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle u_0, \varphi(0, \cdot) \rangle.$$

On généralise alors le Théorème 6.1 par le théorème :

Théorème 6.2 Soit $u_0 \in M(\mathbb{R}^d)$; on suppose, en plus de l'hypothèse (6.56), que $a_i \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq i \leq n$ et que $f \in M((0, T) \times \mathbb{R}^d)$. Alors le problème (C) admet une unique solution faible $u \in M((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ donnée par

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle = & \langle u_0, x \mapsto \int_0^T \varphi(t, T_{0,t}(x)) \exp \left(- \int_0^t a_0(s, T_{0,s}(x)) ds \right) dt \rangle \\ & + \langle f, (s, x) \mapsto \int_s^T \varphi(t, T_{s,t}(x)) \exp \left(- \int_s^t a_0(\sigma, T_{s,\sigma}(x)) d\sigma \right) dt \rangle \end{aligned} \quad (6.58)$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c([0, T[\times \mathbb{R}^d)$.

Donnons brièvement l'idée de la preuve de l'existence de la solution en supposant $a_0 = 0$ et $f = 0$ pour simplifier (la preuve s'adapte facilement au cas général). La formule (6.58) définit bien une mesure u , et on a, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0, T[\times \mathbb{R}^d)$,

$$\langle u, L^* \varphi \rangle = \langle u_0, x \mapsto \int_0^T (L^* \varphi)(t, T_{0,t}(x)) dt \rangle.$$

En remarquant que

$$\frac{d}{dt} [\varphi(t, T_{0,t}(x))] = - (L^* \varphi)(t, T_{0,t}(x)),$$

on a, comme φ est à support compact dans $[0, T[\times \mathbb{R}^d$,

$$\int_0^T (L^* \varphi)(t, T_{0,t}(x)) dt = \varphi(0, T_{0,0}(x)) = \varphi(0, x),$$

et finalement

$$\langle u, L^* \varphi \rangle = \langle u_0, \varphi(\cdot, 0) \rangle.$$

Par ailleurs, remarquons que la solution (6.58) coïncide bien avec celle donnée par l'expression (6.57) du Théorème 6.1 lorsque $u_0 \in L^1_{loc}((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ (en supposant ici encore $a_0 = 0$ et $f = 0$ pour simplifier, mais le cas général s'obtient immédiatement). En effet, dans ce cas

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \int_0^T \varphi(T_{0,t}(x), t) dt dx,$$

et en remarquant que $T_{0,t} \circ T_{t,0} = \text{Id}$, le changement variable $x = T_{t,0}(y)$ de jacobien $J(0; y, t)$ donne

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^T u_0(T_{t,0}(y)) J(0; y, t) \varphi(y, t) dt dy. \quad (6.59)$$

L'expression (6.59) coïncide donc bien avec l'expression de u donnée au sens des fonctions $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times (0, T))$ de (6.57).

On peut déduire en particulier du théorème 6.2 le corollaire suivant, dans le cas où la donnée initiale est une masse de Dirac.

Corollaire 6.1 *On suppose que $f = 0$ et que la donnée initiale est donnée par*

$$u_0(x) = \omega_0 \delta(x - x_0).$$

Alors la mesure solution de l'équation (C) est donnée par

$$u(x, t) = \omega(t) \delta(x - T_{0,t}(x_0)),$$

où

$$\omega(t) = \omega_0 \exp \left(- \int_0^t a_0(s, T_{0,s}(x_0)) ds \right).$$

Autrement dit,

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_0^T \omega(t) \varphi(t, T_{0,t}(x_0)) dt$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c([0, T[\times \mathbb{R}^d)$.

La solution $u(t, \cdot)$ est donc proportionnelle à chaque instant $t \in [0, T]$ à une masse de Dirac se “déplaçant” le long de la caractéristique issue de x_0 . On appelle solution particulière une telle solution. Partant de cette observation, l’idée des méthodes particulières est d’approcher la donnée initiale u_0 par une combinaison linéaire de masses de Dirac :

$$u_0(x) \approx \sum_{i=1}^N \omega_i^0 \delta(x - x_i),$$

cette approximation pouvant être réalisée en pratique par une formule de quadrature ou une méthode de Monte-Carlo. La solution $u(x, t)$ de (C) avec $f = 0$ est alors donnée par

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) \delta(x - X_i(t)),$$

où, pour $1 \leq i \leq N$, X_i est la solution du système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dX_i}{dt} = \mathbf{a}(t, X_i(t)), \\ X(0) = x_i, \end{cases}$$

et $\omega_i(t)$ la solution de l’équation différentielle

$$\omega_i'(t) + a_0(t, X_i(t)) = 0,$$

de condition initiale $\omega_i(t) = \omega_i^0$. Ces solutions sont généralement obtenues numériquement, avec une méthode d’Euler ou de Runge-Kutta.

Considérons maintenant l’exemple de l’équation de Vlasov

$$(C) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \operatorname{div}_v(\mathbf{F}f) = 0, & v \in \mathbb{R}^3, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), \end{cases} \quad (6.60)$$

où $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x, v)$. On se ramène alors aisément à un problème de la même forme que le problème (C) avec $a_0 = 0$ et $f = 0$ en posant $Z = (x; v) \in \mathbb{R}^6$. La densité initiale est approchée par

$$f_0(t, x, v) \approx \sum_{i=1}^N \omega_i^0 \delta(x - x_i) \delta(v - v_i),$$

de sorte que, sous les bonnes hypothèses de régularité sur \mathbf{F} , la densité est alors approchée au temps t par

$$f(t, x, v) \approx \sum_{i=1}^N \omega_i^0 \delta(x - X_i(t)) \delta(v - V_i(t)),$$

où $(X_i(t), V_i(t))$ est solution du système

$$\begin{cases} \frac{dX_i}{dt} = V_i(t), \\ \frac{dV_i}{dt} = \mathbf{F}(t, X_i(t), V_i(t)), \end{cases} \quad (6.61)$$

avec la donnée initiale

$$\begin{cases} X_i(0) &= x_i, \\ V_i(0) &= v_i. \end{cases}$$

Heuristiquement, cette méthode consiste donc à approcher la distribution initiale f_0 par un nombre fini de particules numériques de représentativités ω_i , et de déplacer ces particules suivant les équations du mouvement déterminées par (6.61).

Annexe E. Établissement des expressions de $\Upsilon_{a,sd}(f_2)$ et $\Upsilon_{a,m}(f_2)$

Nous justifions dans cette Annexe les expressions de $\Upsilon_{a,sd}(f_2)$ et $\Upsilon_{a,m}(f_2)$ utilisées au Chapitre 6, qui proviennent du re-dimensionnement des termes $\bar{\Upsilon}_{a,sd}(\check{f}_2)$ et $\bar{\Upsilon}_{a,m}(\check{f}_2)$ introduits au Chapitre 4. Rappelons que les variables sont adimensionnées par

$$\bar{x} = \frac{x}{L^\circ}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^\circ}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_{min}},$$

et

$$\hat{v}_1 = \frac{v_1}{V_1^\circ}, \quad \check{v}_2 = \frac{v_2}{V_2^\circ},$$

où les vitesses caractéristiques V_1° et V_2° vérifient

$$V_1^\circ = \sqrt{\varepsilon_m} V_2^\circ. \quad (6.62)$$

Les densités f_1 et f_2 sont adimensionnées en posant

$$\hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) = \frac{f_1(t, x, v, r)}{f_1^\circ},$$

et

$$\check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) = \frac{f_2(t, x, v_2)}{f_2^\circ}.$$

D'après (4.43) et (4.49), on a

$$R_1(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) = f_1^\circ f_2^\circ (r_{min})^2 (V_2^\circ)^4 \bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}), \quad (6.63)$$

où R_1 représente R_1^d ou R_1^{dm} , et \bar{R}_1 représente \bar{R}_1^d ou \bar{R}_1^{dm} . Par ailleurs, d'après la Proposition 4.2, on a formellement

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\hat{v}_1) \bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2) d\hat{v}_1 \underset{\varepsilon_m \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\varepsilon_m} \bar{\Upsilon}_a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{\hat{v}_1} \varphi(\hat{v}_1) \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1, \quad (6.64)$$

où $\bar{\Upsilon}_a(\check{f}_2)$ a pour expression

$$\bar{\Upsilon}_{a,sd}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) = \frac{\pi}{\bar{r}} \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \left[|\check{v}_2| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] \check{v}_2 d\check{v}_2,$$

lorsque $\bar{R}_1 = \bar{R}_1^d$, dans laquelle on a posé $\bar{\beta} = \beta V_2^\circ$, ou

$$\bar{\Upsilon}_{a,m}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) = \frac{4\pi}{\bar{r}^3} \bar{C}_m(\bar{r}) \int_{\mathbb{R}^3} \check{f}_2(\bar{t}, \bar{x}, \check{v}_2) \check{v}_2 d\check{v}_2,$$

lorsque $\bar{R}_1 = \bar{R}_1^{dm}$, dans laquelle on a posé

$$\bar{C}_m(\bar{r}) = \frac{C_m(r)}{V_2^\circ (r_{min})^2}. \quad (6.65)$$

D'après (6.63), on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v_1) R_1(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) dv_1 \\ &= f_1^\circ f_2^\circ (r_{min})^2 (V_2^\circ)^4 (V_1)^3 \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(V_1^\circ \hat{v}_1) \bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1, \end{aligned} \quad (6.66)$$

puis d'après (6.64), on peut écrire

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(V_1^\circ \hat{v}_1) \bar{R}_1(\hat{f}_1, \check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1 \\ & \sim_{\varepsilon_m \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon_m} \bar{\Upsilon}_a(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} (V_1^\circ) \nabla_{v_1} \varphi(V_1^\circ \hat{v}_1) \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1. \end{aligned} \quad (6.67)$$

De plus, on a

$$f_2^\circ (V_2^\circ)^5 (r_{min})^2 \bar{\Upsilon}_{a, sd}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) = (r_{min})^3 \frac{\pi}{r} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) \left[|v_2| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] v_2 dv_2, \quad (6.68)$$

$$f_2^\circ (V_2^\circ)^5 (r_{min})^2 \bar{\Upsilon}_{a, m}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) = (r_{min})^3 \frac{4\pi}{r^3} C_m(r) \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) v_2 dv_2, \quad (6.69)$$

d'après (6.65), et

$$f_1^\circ (V_1^\circ)^3 \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{v_1} \varphi(V_1^\circ \hat{v}_1) \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{v_1} \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1, r) dv_1.$$

Ainsi, d'après (6.66), (6.67), (6.68), puis (6.62), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v_1) R_1^d(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) dv_1 \\ & \sim_{\varepsilon_m \rightarrow 0} f_1^\circ f_2^\circ (r_{min})^2 (V_2^\circ)^4 (V_1)^4 \sqrt{\varepsilon_m} \bar{\Upsilon}_{a, sd}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{\hat{v}_1} \varphi(V_1^\circ \hat{v}_1) \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1 \\ & \sim_{\varepsilon_m \rightarrow 0} \frac{V_1^\circ}{V_2^\circ} \sqrt{\varepsilon_m} (r_{min})^3 \frac{\pi}{r} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) \left[|v_2| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] v_2 dv_2 \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{v_1} \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1, r) dv_1 \\ & \sim_{\varepsilon_m \rightarrow 0} \varepsilon_m (r_{min})^3 \frac{\pi}{r} \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) \left[|v_2| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] v_2 dv_2 \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{v_1} \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1, r) dv_1, \end{aligned}$$

et d'après (6.69) :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v_1) R_1^{dm}(f_1, f_2)(t, x, v_1, r) dv_1 \\ & \sim_{\varepsilon_m \rightarrow 0} f_1^\circ f_2^\circ (r_{min})^2 (V_2^\circ)^4 (V_1)^3 \sqrt{\varepsilon_m} \bar{\Upsilon}_{a, m}(\check{f}_2)(\bar{t}, \bar{x}, \bar{r}) \cdot \int_{\mathbb{R}^3} (V_1^\circ) \nabla_{\hat{v}_1} \varphi(V_1^\circ \hat{v}_1) \hat{f}_1(\bar{t}, \bar{x}, \hat{v}_1, \bar{r}) d\hat{v}_1 \\ & \sim_{\varepsilon_m \rightarrow 0} \varepsilon_m (r_{min})^3 \frac{4\pi}{r^3} C_m(r) \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) v_2 dv_2 \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_{v_1} \varphi(v_1) f_1(t, x, v_1, r) dv_1. \end{aligned}$$

On pose donc, puisque $\varepsilon(r) = \varepsilon_m(r_{min}/r)^3$:

$$\Upsilon_{a, sd}(f_2)(t, x, v, r) = \varepsilon(r) \pi r^2 \int_{\mathbb{R}^3} f_2(t, x, v_2) \left[|v_2| + \frac{\sqrt{\pi}}{3\beta} \right] v_2 dv_2,$$

et

$$\Upsilon_{a, m}(f_2)(t, x, v, r) = \varepsilon(r) 4\pi C_m(r) n_{f_2}(t, x) \mathbf{u}_{f_2}(t, x).$$

Bibliographie

- [Ar] L. Arkeryd. On the Boltzmann equation, i and ii. *Arch. Rat. Mech. Anal*, **45**, 1–34, 1972.
- [BN] M.R. Baer and J.W. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (ddt) in reactive materials. *International Journal of Multiphase Flow*, **12**, 861–889, 1986.
- [Ba] C. Baranger. *Modélisation, étude mathématique et simulation des collisions dans les fluides complexes*. PhD thesis, ENS Cachan, 2004.
- [BT] A. Barrat, E. Trizat, and M.H. Ernst. Granular gases : dynamics and collective effects. *Journal of Physics-Condensed Matter*, **17**, n° 24, 2429–2437, 2005.
- [Br] R. Barthelmé. *Le problème de conservation de la charge dans le couplage des équations de Vlasov et de Maxwell*. Phd Thesis, Université Louis Pasteur, 2005.
- [BZ] C.M. Benson, D.A. Levin, J. Zhong, S.F. Gimelshein, and A. Montaser. Kinetic model for simulation of aerosol droplets in high-temperature environments. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, **18**, n° 1, 122–134, 2004.
- [Bi1] G.A. Bird. Direct simulation and the Boltzmann equation. *Physics of Fluids*, **13**, 2676, 1970.
- [Bi2] G.A. Bird. *Molecular gas dynamics*. Oxford University Press, 1976.
- [Bi3] G.A. Bird. Monte Carlo simulation of gas flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **10**, 11–31, 1978.
- [Bi4] G.A. Bird. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*. Oxford University Press, New York, 1994.
- [Bo] A.V. Bobylev. Moment inequalities for the Boltzmann equation and applications to spatially homogeneous problems. *Journal of Statistical Physics*, **88**, n° 5, 1183–1214, 1996.
- [Br] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 1999.
- [Ca] T. Carleman. *Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz*. Almqvist & Wiksells, 1957.
- [Ce1] C. Cercignani. *The Boltzmann Equation and its Applications*. Number 67 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New-York, 1987.
- [Ce2] C. Cercignani. Measure solutions of the steady Boltzmann equation in a slab. *Communications in Mathematical Physics*, **142**, n° 2, 285–296, 1991.

- [Ce3] C. Cercignani. Recent developments in the mechanics of granular materials. In Pitagora, editor, *Fisica matematica e ingegneria delle strutture : rapporti e compatibilità*, 119–132. G. Ferrarese, 1995.
- [CeP] C. Cercignani, R. Illner, and M. Pulvirenti. *The mathematical theory of dilute gases*. Springer, 1994.
- [Ch] F. Charles, Kinetic modelling and numerical simulations using particle methods for the transport of dust in a rarefied gas. In *Rarefied Gas Dynamics : Proceedings of the 26th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*. **1084**, 409–414, 2008.
- [ChDe] F. Charles, L. Desvillettes. Small mass ratio limit of Boltzmann equations in the context of the study of evolution of dust particles in a rarefied atmosphere accepté pour publication dans *Journal of Statistical Physics*.
- [CD] I. Choquet, P. Degond, and B. Lucquin-Desreux. A hierarchy of diffusion models for partially ionized plasmas. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, **8**, n° 4, 735, 2007.
- [Cr] J.F. Crifo, G.A. Loukianov, A.V. Rodionov, and V.V. Zakharov. Direct Monte Carlo and multifluid modeling of the circumnuclear dust coma spherical grain dynamics revisited. *Icarus*, **176**, n° 1, 192–219, 2005.
- [Cu] E. Cunningham. On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium. In *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 357–365. The Royal Society, 1910.
- [DM] A. Decoster, P.A. Markowich, B. Perthame, and P.A. Raviart. *Modelling of collisions*. Series in applied mathematics, 2004.
- [DL1] P. Degond and B. Lucquin-Desreux. The asymptotics of collision operators for two species of particule of disparate masses. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **6**, n° 3, 405–410, 1996.
- [DL2] P. Degond and B. Lucquin-Desreux. Transport coefficients of plasmas and disparate mass binary gases. *Transport Theory and Statistical Physics*, **26**, n° 6, 595–633, 1996.
- [DL3] P. Degond and B. Lucquin-Desreux. Comportement hydrodynamique d'un mélange gazeux formé de deux espèces de particules de masses très différentes. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences. Série 1, Mathématique*, **322**, n° 4, 405–410, 1996.
- [De1] L. Desvillettes. On the convergence of splitting algorithms for some kinetic equations. *Asympt. Anal.*, **6**, n° 4, 315–333, 1993.
- [De2] L. Desvillettes. Some applications of the method of moments for the homogeneous Boltzmann and Kac equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **123**, n° 4, 387–404, 1993.
- [DeMi] L. Desvillettes and S. Mischler. About the splitting algorithm for Boltzmann and B.G.K. equations. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **6**, n° 8, 1079–1101, 1996.
- [DeMo] L. Desvillettes and C. Mouhot. About L^p estimates for the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **22**, n° 2, 127–142, 2005.

- [DiPL] R.J. Di-Perna and P.-L. Lions. On the Cauchy problem for Boltzmann equation ; global existence and weak stability. *Ann. Math.*, **130**, 321–366, 1989.
- [Du1] G. Dufour. *Modélisation multi-fluide eulérienne pour les écoulements diphasiques à inclusions dispersées*. PhD thesis, ENSAE, 2005.
- [Du2] G. Dufour, M. Massot, and P. Villedieu. Étude d’un modèle de fragmentation secondaire pour les brouillards de gouttelettes. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, **336**, n° 5, 447–452, 2003.
- [El] T. Elmroth. Global boundedness of moments of solutions of the Boltzmann equation for forces of infinite range. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **82**, n° 1, 1–12, 1983.
- [FP] E. Ferrari and L. Pareschi. Modelling and numerical methods for the diffusion of impurities in a gas. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1–16, 2006.
- [Fr] S. Østmo, A. Frezzotti, and T. Ytrehus. Kinetic theory study of steady evaporation from a spherical condensed phase containing inert solid particles. *Physics of Fluids*, **9**, 211, 1997.
- [GP] I. Gamba, V. Panferov, and C. Villani. On the Boltzmann equation for diffusively excited granular media. *Communications in Mathematical Physics*, **246**, n° 3, 503–541, 2004.
- [GM] J.R. Garcia-Cascales, J. Mulas-Pérez, and H. Paillère. Extension of some numerical schemes to the analysis of gas and particle mixtures. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **56**, 845–875, 2008.
- [Gid] D. Gidaspow. Hydrodynamics of fluidisation and heat transfer. supercomputer modeling. *Applied Mechanics Review*, **39**, 1–23, 1983.
- [Gio] V. Giovangigli. *Multicomponent flow modeling*. Birkhauser, 1999.
- [Gr1] H. Grad. Principles of the theory kinetic of gases. In *Flüges Handbuch des Physik*, volume XII, 205–294. Springer Verlag, 1958.
- [Gr2] H. Grad. Asymptotic theory of the Boltzmann equation. *Physics of Fluids*, **6**, 147, 1963.
- [GO] C. Grisolia, F. Onofri, and K.F. Ren. Développement d’un diagnostic optique des poussières en suspension dans le tokamac iter. In *Congrès francophone de Techniques Laser*, 2008.
- [H] J. Hylkema. *Modélisation cinétique et simulation numérique d’un brouillard dense de gouttelettes. Application aux propulseurs à poudre*. PhD thesis, ENSAE - Université Toulouse-III, 1999.
- [LL] L.D. Landau and E.M. Lifshich. *Physique théorique. Tome VI : Mécanique des fluides*. Moscou : Editions Mir, 1971.
- [LP] B. Lapeyre, E. Pardoux, and R. Sentis. *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*. Springer, 1998.
- [LL] M. Larin, F.E. Lumpkin III, and P. Stuart. Modeling unburned propellant droplet distribution and velocities in plumes of small bipropellant thrusters. In *AIAA Thermophysics Conference, 35 th, Anaheim, CA*, 2001.

- [Li] P.L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics*. Oxford University Press, USA, 1996.
- [LM] P.-L. Lions and B. Mercier. Splitting algorithms for the sum of two maximal monotone operators. *S.I.A.M. J. Numer. Anal.*, **31**, 964–979, 1979.
- [Lu] X. Lu. Conservation of energy, entropy identity, and local stability for the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Journal of Statistical Physics*, **96**, n° 3, 765–796, 1999.
- [Ma] J. Mathiaud. *Étude de systèmes de type gaz-particules*. PhD thesis, ENS de Cachan, 2006.
- [MP] K.A. McCarthy, D.A. Petti, W.J. Carmack, and S.V. Gorman. Tokamak dust in iter-safety issues and r&d supporting dust limits. *Fusion Technology-Illinois-*, **34**, 728–732, 1998.
- [MiW] S. Mischler and B. Wennberg. On the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Annales de l'Institut Henri Poincaré/Analyse non lineaire*, **16**, 467–501. Elsevier, 1999.
- [N] K. Nanbu. Theoretical basis of the direct simulation Monte Carlo method. In *International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, 15th, Grado, Italy, June 16-20, 1986, Proceedings*, **1**, 1986.
- [OA] P.J. ORourke and A.A. Amsden. The TAB method for numerical calculation of spray droplet breakup. In *International fuels and lubricants meeting and exposition*, **2**, 1987.
- [OL] B. Otterman and A. Levinet. Analysis of gas-solid particles in shock tubes. *AIAA Journal*, **12**, 579–580, 1974.
- [PeR1] L. Pareschi and G. Russo. An introduction to the numerical analysis of the Boltzmann equation. *Lecture Notes at M&KT, Riv. Mat. Univ. Parma*, **4**, 145–250., 2005.
- [PeR2] L. Pareschi and G. Russo. An introduction to Monte Carlo methods for the Boltzmann equation. In *ESAIM : Proceedings*, 1999.
- [Pe] B. Perthame. Introduction to the theory of random particle methods for Boltzmann equation. Technical Report 2218, INRIA, 1994.
- [Ph] W. Philips. Drag on small sphere moving through a gas. *Phys. Fluids*, **18**, 1089–1093, 1975.
- [Po] A.Y. Povzner. On the Boltzmann equation in the kinetic theory of gases. *Matematicheskii Sbornik*, **100**, n° 1, 65–86, 1962.
- [PuW] A. Pulvirenti and B. Wennberg. A Maxwellian lower bound for solutions to the Boltzmann equation. *Communications in Mathematical Physics*, **183**, n° 1, 145–160, 1997.
- [Pu2] M. Pulvirenti. Kinetic and hydrodynamics equations for granular media. In *Journées équations aux dérivées partielles*, 1999.
- [Ra] P.A. Raviart. An analysis of particle methods. *Lecture notes in mathematics*, **1127**, 243–324, 1985.

- [Ro] P. Roblin. Documentation de référence du code DSMC. Technical report, CEA Saclay, 2009.
- [So] E. Sonnendrücker. Modèles cinétiques pour la fusion, Notes du cours de M2. IRMA, 2008.
- [Ta] K. Takase. Three-dimensional numerical simulations of dust mobilization and air ingress characteristics in a fusion reactor during a LOVA event. *Fusion Engineering and Design*, **54**, n° 3-4, 605–615, 2001.
- [To] G. Toscani. One-dimensional kinetic models of granular flows. *RAIRO Modél Math. Anal. Numér.*, **34**, 1277–1292, 2000.
- [Tr] H.F. Trotter. On the product of semi-groups of operators. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, 545–551, 1959.
- [Ts] H.S. Tsien. Superaerodynamics, mechanics of rarefied gases. *J. Aero. Sci*, **13**, n° 12, 653–664, 1946.
- [V1] C. Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. *Handbook of mathematical fluid dynamics*, **1**, 71–305, 2002.
- [V2] C. Villani. Mathematics of granular material. to appear in *J. Stat. Phys.*
- [W1] B. Wennberg. The Povzner inequality and moments in the Boltzmann equation. In *Proceedings of the VIII International Conference on Waves and Stability in Continuous Media, Part II (Palermo, 1995)*, 673–681, 1996.
- [W2] B. Wennberg. Entropy dissipation and moment production for the Boltzmann equation. *Journal of Statistical Physics*, **86**, n° 5, 1053–1066, 1997.
- [XT] Z. Xu, J. R. Travis, and W. Breitung. Benchmarking validations for dust mobilization models of gasflow code. Technical report, Institut für Kern- und Energietechnik, 2008.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à des modèles cinétiques décrivant un aérosol constitué de particules solides dans un gaz raréfié. Ces modèles sont constitués d'un couplage de deux Équations aux Dérivées Partielles décrivant l'évolution spatio-temporelle des distributions en molécules de gaz et en particules de poussière.

Le modèle présenté dans la première partie de ce travail est constitué d'un couplage de deux équations de type Boltzmann, dans lequel l'interaction entre les molécules de gaz et les particules de poussière est décrite par deux opérateurs de collision. Nous proposons deux modélisations de ces opérateurs. Dans la première, les collisions entre particules et molécules sont supposées élastiques. Dans la seconde, nous modélisons ces collisions par un mécanisme inélastique de réflexion diffuse sur la surface des particules. Nous établissons alors des opérateurs de collision d'expressions non classiques. D'un point de vue mathématique, nous montrons que le couplage homogène en espace muni des opérateurs de collision élastiques possède des solutions faibles préservant la masse et l'énergie, et vérifiant une inégalité d'entropie. Nous proposons ensuite une mise en œuvre numérique du modèle dit de réflexion diffuse, basé sur un code de type Direct Simulation Monte Carlo. Celle-ci met en évidence un coût de simulation de l'opérateur particules-molécules trop élevé lorsque les particules ont un rayon trop grand.

Nous introduisons alors dans la deuxième partie de ce travail un modèle constitué d'un couplage (par l'intermédiaire d'une force de traînée) entre une équation de Vlasov et une équation de Boltzmann. Pour cela, nous effectuons un adimensionnement du premier système, suivi d'un développement asymptotique de l'opérateur de collision particules-molécules adimensionné en fonction du rapport de masse entre une molécule et une particule de poussière. Nous justifions ensuite rigoureusement ce développement asymptotique dans le cas homogène en espace et pour le modèle de collisions élastiques en prouvant que les solutions du couplage Boltzmann/Boltzmann convergent faiblement vers des solutions du couplage asymptotique Vlasov/Boltzmann. Nous établissons pour cela une nouvelle variante de l'inégalité de Povzner, adaptée au cas de particules de masses très différentes. Par ailleurs, nous comparons numériquement les systèmes Boltzmann/Boltzmann et Vlasov/Boltzmann pour le modèle dit de réflexion diffuse. La mise en œuvre numérique du système Vlasov/Boltzmann est réalisée par couplage entre une méthode de type Particle-In-Cell et une méthode Monte-Carlo.

Enfin, nous présentons l'application de ces modèles à la simulation numérique de la mobilisation et du transport de particules de poussière au début d'un accident de perte de vide, dans le cadre d'étude de sûreté pour le réacteur ITER.

Mots clés : équation de Boltzmann, équation de Vlasov, inégalité de Povzner, méthodes particulières, simulation 3D d'écoulements raréfiés.

Abstract

The thesis deals with kinetic models describing a rarefied spray. These models rely on coupling two Partial Differential Equations which describe the spatio-temporal evolution of the distribution in molecules and in dust particles.

The model presented in the first part is described by two Boltzmann-type equations where collisions between molecules and particles are modeled by two collision operators. We suggest two modelings of this collision operators. In the first one, collisions between dust particles and molecules are supposed to be elastic. In the second one, we assume those collisions are inelastic and given by a diffuse reflexion mechanism on the surface of dust specks. This leads to establish non classical collision operators. We prove that in the case of elastic collisions, the spatially homogeneous system has weak solutions which preserve mass and energy, and which satisfy an entropy inequality. We then describe the numerical simulation of the inelastic model, which is based on a Direct Simulation Method. This brings to light that the numerical simulation of the system becomes too expensive provided that the typical size of a dust particle is too large.

We therefore introduce in the second part of this work a model constituted of a coupling (by a drag force term) between a Boltzmann equation and a Vlasov equation. To this end, we perform a scaling of the Boltzmann/Boltzmann system and an asymptotic expansion of one of the dimensionless collision operators with respect to the ratio of mass between a molecule of gas and a particle. A rigorous proof of the passage to the limit is given in the spatially homogeneous setting, for the elastic model of collision operators. It includes a new variant of Povzner's inequality in which the vanishing mass ratio is taken into account. Moreover, we numerically compare the Boltzmann/Boltzmann and Vlasov/Boltzmann systems with the inelatic collision operators. The simulation of the Vlasov equation is performed with a Particle-In-Cell method.

Starting from these models, we perform some numerical simulations of a loss-of-vacuum event in the framework of safety studies in the ITER.

Keywords : Boltzmann equation, Vlasov equation, Povzner's inequality, particle simulation.